**Кыргызский государственный технический университет
имени И. Раззакова**

**Кыргызско-Российский Славянский университет
имени Б. Ельцина**

Диссертационный совет Д 01.22.652

На правах рукописи
УДК 532.546

Жусупбекова Самара Толобековна

Исследование течения вязкой жидкости вблизи вогнутой поверхности асимптотическими методами

Специальность 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2022

Работа выполнена на кафедре высшей математики и математического моделирования Кыргызского национального аграрного университета имени К. И. Скрябина.

Научный руководитель: **Бийбосунов Алмаз Ильясович**
доктор физико-математических наук, директор представительства Кыргызской Республики ООО «Газпром проектирование»

Официальные оппоненты: **Чечейбаев Байыш Чечейбаевич**
доцент доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры общей и теоретической физики Кыргызского национального университета имени Жусупа Баласагына

Мукамбаев Нурбек Жээмбаевич
доцент, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры информационные системы и технологии Международной Академии управления, финансов и бизнеса

Ведущая организация: Кафедра прикладной информатики Кыргызского государственного университета имени И. Арабаева, Кыргызстан, 720026, г. Бишкек, ул. Раззакова, 51А.

Защита состоится 13 января 2023 года в 12.00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.22.652 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Кыргызско-Российского Славянского университета имени Б. Ельцина и Кыргызского государственного технического университета имени И. Раззакова по адресу: Кыргызская Республика, 720044, г. Бишкек, проспект Ч. Айтматова, 66, малый актовый зал аудитория 1/257.

Идентификатор защиты - https://vc.vak.kg/b/012-sczoh6-lwn

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Кыргызского государственного технического университета имени И. Раззакова по адресу: Кыргызская Республика, 720044, г. Бишкек, проспект Ч. Айтматова 66 и Кыргызско-Российского Славянского университета имени Б. Ельцина по адресу: Кыргызская Республика, 720000, г. Бишкек, ул. Киевская 44 и на сайте https://vak.kg

Автореферат разослан 12 декабря 2022 года

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент Кожошов Т.Т.

ОБЩАЯ ХАРАТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Актуальность темы диссертации. При обтекании потоком несжимаемой или сжимаемой жидкости вогнутой поверхности при высоких значениях скорости или при большом значении числа Re начинает проявляться неустойчивость, вызванная центробежными силами. В пограничном слое возбуждаются стационарные вихри (вихри Гертлера) имеющих противоположное вращение и ориентированных вдоль потока. Это явление играет значительную роль в инициировании перехода ламинарного течения в турбулентное, и, следовательно, в работе различных гидравлических устройств с искривлением потока, течении жидкости и газа в магистральных трубопроводах в сложных горных рельефах и т.д.

Метод сращиваемых асимптотических разложений применительно к системе уравнений Навье – Стокса в случае исследования вихрей Гертлера при больших, но докритических значения чисел Рейнольдса и Гертлера позволяет выявить основные механизмы развития неустойчивости течения, определить параметры подобия и значительно упростить краевые задачи, решения которых справедливы при соответствующих предельных переходах. Этот тезис обуславливает и теоретическую актуальность диссертационной работы.

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами. Диссертация выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ кафедры высшей математики и математического моделирования. Кыргызского национального аграрного университета имени К.И. Скрябина. Некоторые результаты диссертации были получены в рамках проектно - изыскательских работ программы газификации Кыргызской Республики до 2030 года.

Цели и задачи исследования. Исследование процессов, возникающих в пограничном слое вблизи вогнутой поверхности при ее обтекании потоком жидкости и газа при гиперзвуковых скоростях.

Для достижения цели решались следующие задачи:

1. Асимптотическими методами линеаризовать систему уравнений Навье-Стокса применительно к частному случаю развития вихрей Гертлера в пограничном слое жидкости и газа вблизи вогнутой поверхности при гиперзвуковых скоростях;

2. Сформулировать пространственные краевые задачи и граничные условия для данного частного случая для определения при заданных диапазонах изменения длины волны вихрей основные механизмы развития неустойчивости течения;

3. Получить численные решения данных краевых задач для несжимаемой и сжимаемой жидкости, определить скорости течения для трехмерного случая, при которых происходит потеря устойчивости течения и наблюдается эффект всплывания вихрей Гертлера.

Научная новизна. Новизна работы заключается в постановках задач и в результатах проведенных исследований, а именно: выполнен нелинейный асимптотический анализ уравнений Навье – Стокса для случая несжимаемой и сжимаемой жидкости в поле центробежных сил вблизи вогнутой поверхности при больших значениях чисел Рейнольдса и Гертлера; сформулированы соответствующие трехмерные краевые задачи с граничными условиями для характерных коротковолновых режимов несжимаемой и сжимаемой жидкости; получены определяющие параметры подобия течения; в линейном приближении получены численные решения и определены скорости набегающего потока несжимаемой и сжимаемой жидкости, при которых происходит переход ламинарного течения в турбулентное для характеристик первых трех основных вихревых мод.

Практическая значимость полученных результатов.

В теории пограничного слоя исследование проблемы неустойчивости ламинарного течения около вогнутой поверхности в следствии возникновения вихрей Гертлера имеет большое прикладное значения применительно к устойчивости и управляемости современных гиперзвуковых летательных аппаратов, проектно-изыскательских работах строительства газопроводов в сложной горной местности. В случае несжимаемой жидкости можно говорить о практическом применения результатов диссертационной работы при совершенствовании работы межлопаточных устройств турбин гидроэлектростанций.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Приближенно - аналитические методы применительно к системе уравнений Навье-Стокса в пограничном слое несжимаемой и сжимаемой жидкости вблизи вогнутой поверхности в поле центробежных сил при больших значениях чисел Рейнольдса и Гертлера;
2. Краевые задачи с соответствующими граничными условиями для характерного коротковолнового режима, полученных для несжимаемой и сжимаемой жидкости;
3. Численные методы решения полученных краевых задач на собственные значения для определения изменений основных
4. функций течения в пограничном слое;
5. Условия перехода ламинарного течения в турбулентное, его возникновения и особенности.

Личный вклад соискателя состоит в проведении самостоятельных исследований, в получении научных результатов в формулировании основных выводов, на основе которых были выполнены исследования рассматриваемых математических моделей для течений вязкой жидкости. Формулировка общей цели работы принадлежат научному руководителю А.И. Бийбосунову.

Апробации результатов исследования. Результаты исследований докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры высшей математики и математического моделирования Кыргызского национального аграрного университета имени К.И. Скрябина и на следующих научных конференциях:

- Международная научно-практическая конференция «Качественное образование, передовая наука, зеленая экономика – будущее планеты» г. Алматы, Казахстан, 2014г.;
- Международная научная конференция «Энергетика: состояние, проблемы, перспективы» г. Бишкек, 2014г.;
- Международная научно-практическая конференция, посвященная к 70-летию д.ф.-м.н., профессора Ершиной А.К. «Инновационное развитие образования, наукоемких производств и альтернативные источники энергии» г. Алматы, Казахстан, 2020г.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Материалы диссертационной работы опубликованы в 12 научных статьях в периодических изданиях Кыргызской Республики, Республики Казахстан и России.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа из введения, четырех глав, заключения и из списка использованной литературы, включая 13 рисунков. Объем диссертационной работы составляет 108 страниц текста.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулированы цель и задачи диссертационного исследования, научная новизна и практическая ценность полученных результатов, показаны основные положения, выносимые на защиту. Приведены сведения об апробации работы, дается информация о числе публикаций и структуре диссертации.

В первой главе «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ» изложен анализ основных проблем исследования в области перехода ламинарной формы течения в турбулентную. Проанализированы возможные частные решения системы уравнений Навье-Стокса течений вязкой жидкости применительно к области пограничного слоя. На основе такого анализа приведены результаты теоретического и экспериментального исследования возникновения и развития концентрированных вихревых структур.

Описан механизм их возникновения, который позволяет на этой основе дать объяснение целого ряда физических явлений.

Во второй главе «МЕТОДОЛОГИИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» описываются объект и предмет исследования, использованные методы для решения поставленных задач. В диссертационной работе объектом исследования являются обтекание вогнутой поверхности набегающим потоком вязкой жидкости. Предметом исследования являются асимптотическое разложение трехмерной краевой задачи с соответствующими граничными условиями при обтекании вогнутой поверхности потоком вязкой несжимаемой и сжимаемой жидкости в поле центробежных сил (вихри Гертлера) вблизи пограничного слоя при больших но докритических значениях чисел Рейнольдса и Гертлера.

В третьей главе «АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ВЫВОД КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ». Для анализа несжимаемого течения вблизи вогнутой поверхности применяется метод сращиваемых асимптотических разложений.

Используется криволинейная ортогональная система координат *(X, Y, Z)*, где ось *X* направлена вдоль вогнутой поверхности в направлении течения, ось *Y* – по нормали к поверхности, а ось *Z* – перпендикулярно к плоскости *(X, Y)*. В выбранной системе координат для несжимаемых жидкости уравнение Навье – Стокса могут быть записаны в безразмерной форме в следующем виде:

$$\frac{1}{1-Ky}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{Kv}{1-Ky}=0 \tag{1}$$

$$\frac{u}{1-Ky}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{Kuv}{1-Ky}+\frac{1}{1-Ky}\frac{\partial P}{\partial x}=$$

$$=\varepsilon^2\left[\frac{1}{(1-Ky)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{K}{1-Ky}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{2K}{(1-Ky)^2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{K^2 u}{(1-Ky)^2}\right]$$

$$\frac{u}{1-Ky}\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{Ku^2}{1-Ky}+\frac{\partial P}{\partial y}=$$

$$=\varepsilon^2\left[\frac{1}{(1-Ky)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{K}{1-Ky}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{2K}{(1-Ky)^2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{K^2 v}{(1-Ky)^2}\right]$$

$$\frac{u}{1-Ky}\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial z}=\varepsilon^2\left[\frac{1}{(1-Ky)^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{K}{1-Ky}\frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

Здесь координаты X, Y, Z отнесены к L, компоненты скорости u,v,w – к u_∞ давление P – к ρU_∞^2 (ρ – плотность жидкости). Отметим, что в дальнейшем используются только безразмерные переменные. Предполагается, что кривизна вогнутой поверхности:

$$K = L/R = \varkappa\ K < 1,\ K \sim O\ (1),\ \varepsilon < \varkappa < 1$$

т.е. рассматриваются такие течения, когда число Гертлера велико:

$$G_e = 2\ R_e^{1/2}\ L/R \sim O\ (\varkappa/\varepsilon) > 1.$$

При асимптотическом анализе будем использовать, ставшие уже традиционными при построении асимптотических теорий, обозначения для различных областей возмущенного течения как показано на рисунке 3.1: область I – возмущенная часть внешнего невязкого течения, ее характерная толщина:

$$\Delta y_1 > \delta \sim O(\varepsilon)$$

область II – основная часть пограничного слоя с характерной толщиной:

$$\Delta y_2 \sim \delta.$$

Вязкая пристеночная область III с характерной толщиной: $\Delta y_3 < \delta$.

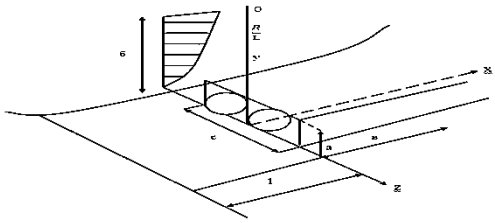

Рисунок 3.1 - схема исследуемого течения
где *a* - характерные толщина, *b* - протяженность и *c* - ширина пространственной возмущенной вихревой области течения: $\varepsilon^2 < a \le c < b \le 1$.

Оценки позволяют для возмущенной вихревой области течения III с характерными размерами, расположенной непосредственно около вогнутой поверхности, ввести следующие переменные и асимптотические разложения функций течения:

$$\begin{aligned} x &= (\varepsilon^{3/5}/\varkappa^{3/5})\ x_3, \\ y &= (\varepsilon^{6/5}/\varkappa^{1/5})\ y_3, \\ z &= (\varepsilon^{6/5}/\varkappa^{1/5})\ z_3, \\ u &= (\varepsilon^{1/5}/\varkappa^{1/5})\ u_3 + \ldots, \\ v &= \varkappa^{1/5}\ \varepsilon^{4/5}\ v_3 + \ldots, \\ w &= \varkappa^{1/5}\ \varepsilon^{4/5}\ w_3 + \ldots, \\ \Delta P &= \varkappa^{2/5}\ \varepsilon^{8/5}\ P_3 + \ldots \end{aligned} \qquad (2)$$

где возмущение давления P отсчитывается от значения на вогнутой поверхности в точке зарождения неустойчивости основного плоского

течения вблизи вогнутой поверхности. Тогда получим, что в первом приближении для области *III* справедливы параболизированные в продольном направлении уравнения Навье – Стокса без продольного градиента давления:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z_3} = 0$$

$$u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial u_3}{\partial z_3} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2{}_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2{}_3}$$

$$u_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial v_3}{\partial z_3} + ku^2{}_3 + \frac{\partial P_3}{\partial y_3} = \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2{}_3} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2{}_3} \qquad (3)$$

$$u_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial z_3} + \frac{\partial P_3}{\partial z_3} = \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2{}_3} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial z^2{}_3}$$

На вогнутой поверхности должны выполняться обычные условия прилипания и не протекания: $u_3 = v_3 = w_3 = 0, \quad y_3 = 0.$

Внешние и начальные краевые условия получаются из сращивания с решением для пристеночной части основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности:

$$u_3 \to Ay_3, \qquad p_3 \to -\mathrm{K}A^2 y^3 / 3$$

$$v_3, \ w_3 \to 0, \quad x_3, \ y_3 \to \infty$$

где *«A»* - напряжение трения в продольном направлении на вогнутой поверхности в точке зарождения неустойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности. Предполагается исследовать периодические по поперечной координате *«z»* - решения, поэтому:

$$f\left(x_3, y_3, z_3\right) = f\left(x_3, y_3, z_3 + \lambda\right) \qquad (4)$$

$$f = u_3, v_3, w_3, p_3$$

где λ - длина волны вытянутых в продольном направлении стационарных вихрей Гертлера. Краевая задача (3) – (4) описывает эволюционное нелинейное развитие вихрей Гертлера с длиной волны меньшей толщины пограничного слоя около вогнутой поверхности.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+u^2+\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (5а)$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

с краевыми условиями

$$u=v=w=0,\ (y=0)\quad u\to y,\quad P\to -y^3/3,\quad v,\ w\longrightarrow 0,\quad x\to-\infty,\qquad y\to\infty$$

$$u(x,y,z)=u(x,y,z+2\pi)$$
$$v(x,y,z)=v(x,y,z+2\pi)$$
$$w(x,y,z)=w(x,y,z+2\pi) \qquad (5б)$$
$$P(x,y,z)=P(x,y,z+2\pi)$$

Здесь для кратности опущен индекс 3 у переменных: сюда, как видно, входит единственный параметр подобия – местное число Рейнольдса:

$$\alpha_1=AK^{1/2}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{5/2}=A\,\mathrm{Re}^{3/2}\left(\frac{h}{R}\right)^{1/2}\left(\frac{\Lambda}{2\pi L}\right)^{5/2}) \qquad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (7)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{g_1u^2}{2}+\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

появился где иной параметр подобия – местное число Гертлера:

$$g_1 = 2\alpha_1^2 = 2A^2K(\frac{\lambda}{2\pi})^5 \tag{8}$$

Тогда в (5а) в уравнениях сохранения компонент импульса необходимо отбросить правые части с диссипативными членами, а вогнутой поверхности будет удовлетворяться только условие не протекания:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{9а}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + u^2 + \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

с краевыми условиями

$$v = 0, \qquad y = 0$$

$$u \to y, \qquad P \to -y^3/3, \quad v, w \longrightarrow 0 \tag{9б}$$

$$x \to -\infty, \quad y \to \infty$$

$$u(x, y, z) = u(x, y, z + 2\pi)$$
$$v(x, y, z) = v(x, y, z + 2\pi)$$
$$w(x, y, z) = w(x, y, z + 2\pi)$$
$$P(x, y, z) = P(x, y, z + 2\pi)$$

Для удовлетворения условий прилипания вблизи вогнутой поверхности необходимо дополнительно рассматривать вязкий подслой с характерной толщиной: $\delta_1 \sim 0\ (\varepsilon\,(\varepsilon/\varkappa b)^{\frac{1}{2}}) < \delta \sim O(\varepsilon)$,
в котором напряжение трения в продольном направлении:

$$\tau_1 \sim 0\,(\varepsilon\,(b/(\varepsilon/\varkappa)^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{2}}) > \tau \sim O\,(\varepsilon)$$

Для малых возмущений, порожденных потерей устойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности, возможна линеаризация решения краевой задачи (5а) – (5б) относительно нижней сдвиговой части пограничного слоя вогнутой поверхности:

$$u = y + \tau v + \cdots,\ v = \tau v + \cdots,\ w = \tau w + \cdots,\ P = -y^3/3 + \tau p + \cdots \quad (10)$$

которая позволяет ее значительно упростить:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + v = \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$y\frac{\partial v}{\partial x} + 2yu + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (11а)$$

$$y\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

с соответствующими краевыми условиями:

$$u = v = w = 0, \qquad y = 0$$

$$u, v, w, P \to 0, \quad x \to -\infty, y \to \infty \quad (11б)$$

$$u(x, y, z) = u(x, y, z + 2\pi)$$

$$v(x, y, z) = v(x, y, z + 2\pi)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y, z + 2\pi)$$

$$P(x, y, z) = P(x, y, z + 2\pi)$$

Решением краевой задачи (11а) – (11б) являются собственные функции u, v, w, P не равные тождественно нулю и тривиальным краевым условиям. Будем использовать обычное для них представление:

$$u = \exp(\beta x)u_1(y)\cos z,\ v = \exp(\beta x)v_1(y)\cos z,$$

$$w = \exp(\beta x)w_1(y)\sin z,\ P = \exp(\beta x)P_1(y)\cos z.$$

Тогда уравнения (11а) – (11б) могут быть сведены к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений и тривиальным краевым условиям:

$$\beta u_1 + v_1^{\mathrm{I}} + w_1 = 0 \quad (12)$$

$$\alpha_1(\beta y u_1 + v_1) = u'' - u_1$$

$$\alpha_1(\beta y w_1 - P_1) = w_1'' - w_1$$

$$u_1(\infty) = v_1(\infty) = w_1(\infty) = 0$$

$$u_1(0) = v_1(0) = w_1(0) = 0$$

Для численного решения уравнений (12) будем использовать метод сеток. Сведем эту систему дифференциальных уравнений к двум дифференциальным уравнениям для компонент скорости u_1, v_1 с соответствующими краевыми условиями. Тогда получим:

$$u_1'' - (1 + \alpha\beta y)u = \alpha v_1$$

$$v_1^{\mathrm{IV}} - (\alpha\beta y + 2)v_1'' + (\alpha\beta y + 1)v_1 = -2\alpha y u_1$$

$$u_1(0) = u_1(\infty) = 0$$

$$v_1(0) = v_1'(0) = v_1(\infty) = v_1'(\infty) = 0$$

с целью упрощения, введем новые обозначения. Пусть:

$$u_1 = u,\ \alpha v_1 = v,\ \alpha\beta = B,\ 2\alpha^2 = \lambda\ .$$

Таким образом, получим:

$$u'' - (1 + By)u = v$$

$$v^{\mathrm{IV}} - (2 + By)v'' + (1 + By)v = -\lambda y u \qquad (13)$$

$$u(0) = u(\infty) = 0\,,\ v(0) = v'(0) = 0,\ v(\infty) = v'(\infty) = 0.$$

Краевая задача (12) является типичной задачей на собственные значения: для каждого значения инкремента нарастания амплитуды вихрей β определялось собственное значение местного числа Рейнольдса α_1 (в обозначениях (13) λ от B). Численное решение было получено методом прогонки. Для этого система уравнений (13) представлялась в конечно-разностном виде, где:

$$u_j'' = \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2},\ v_j^{\mathrm{IV}} = \frac{v_{j-2} - 4v_{j-1} + 6v_j - 4v_{j+1} + v_{j+2}}{h^4}$$

Тогда (13) принимает вид:

$$u_{j-1} + P_j u_j + u_{j+1} = Q_j v_j$$

$$v_{j-2} + D_j v_{j-1} + c_j v_j + D_j v_{j+1} + v_{j+2} = R_j u_j \qquad (14)$$

$$v(0) = v'(0) = 0, \qquad u(0) = u(N) = 0$$

$$v(N) = v'(N) = 0, \qquad \text{j=1,..,N}$$

Для вычисления распределений компонент скорости: u, v, w использовались начальные приближения для первой вихревой моды вида $u_0(y) = y^6 / \exp y^2$. Собственные значения находились по известной формуле:

$$\lambda_{n+1} = \frac{(yw_n, w_n)}{(yu_{n+1}, u_n)}, \; n = 0,1,...., N$$

Для второй вихревой моды начальное приближение задавалось как:

$$u_0(y) = \frac{(k-y)^5}{\exp y^2}, \; k = const$$

Для третьей вихревой моды: $u_0(y) = y^4 + by^3 + cy^2 + dy$, $b, c, d = const$

Вывод из полученных результатов численных решений можно сделать следующие выводы. Как уже отмечалось, выше были получены зависимости компонент скорости u, v, z от координаты y для первых основных мод (см. рисунок *3.2*). Для первой вихревой моды получены профили скоростей u, v, w при значениях λ Рассмотрение течения в пристеночной части основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности необходимо выделять дополнительно вязкий подслой. По мере уменьшения λ максимум профиля компоненты скорости u удаляется от поверхности. Кривые λ(B) для первых трех основных вихревых мод совпадают, а затем уже расходятся.

В четвертой главе «АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ВЫВОД КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ» сформулирована математическая модель, описывающая нелинейную фазу развития возмущений в сжимаемом пограничном слое в поле центробежных сил при больших, но докритических значениях чисел Рейнольдса и Гертлера. Эта модель предназначена как для описания развития вихрей Гертлера, так и для описания возмущенных течений около локальных или периодических в трансверсальном направлении неровностей или других пространственных возмущенных течений. На основе метода сращиваемых асимптотических разложений исследованы некоторые линейные режимы развития возмущений в поле центробежных сил. В частности, выявлена роль переходного температурного слоя в развитии возмущений в гиперзвуковых потоках. Рассмотрим режим, соответствующий длинам волны вихрей Гертлера λ сравнимые с толщиной пограничного слоя δ. В выбранной системе координат система уравнений Навье-Стокса может быть записана следующем виде (для сжимаемой жидкости):

$$\frac{1}{1-Ky}\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}-\frac{Kv}{1-Ky}=0$$

$$\frac{\rho u}{1-Ky}\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}+\rho w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{K\rho uv}{1-Ky}+\frac{1}{1-Ky}+\frac{1}{1-Ky}\frac{\partial P}{\partial x}=\varepsilon^2\left[\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial u}{\partial y})+...\right] \quad (15)$$

$$\frac{\rho u}{1-Ky}\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}+\rho w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\rho Ku^2}{1-Ky}+\frac{\partial P}{\partial y}=\varepsilon^2\left[\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial v}{\partial y})+...\right]$$

$$\frac{\rho u}{1-Ky}\frac{\partial w}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w}{\partial y}+\rho w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial z}=\varepsilon^2\left[\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial w}{\partial y})+...\right]$$

$$\frac{\rho u}{1-Ky}\frac{\partial H}{\partial x}+\rho v\frac{\partial H}{\partial y}+\rho w\frac{\partial H}{\partial z}=\varepsilon^2\left[\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\mu}{P_r})\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(1-\frac{1}{P_r})\frac{\partial}{\partial y}(\frac{u^2}{2})\right]$$

Решение такой системы уравнений для трехмерного пограничного слоя в соответствии с веденными оценками для функции течения можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению в виде:

$$z''+2z'(\frac{M_0'}{M_0})+z(-\beta+2(\frac{M_0'}{M_0'\alpha^2}))=0 \quad (16)$$

с граничными условиями:

$$v_1(0)=0\ ,\ v_1(\infty)=0$$
$$z(\infty)=0\ ,\ z(0)=const \quad (17)$$

В связи с разным асимптотическим поведением собственных чисел, соответствующих нулевой и последующим модам α при $\lambda/\varepsilon\to\infty$ можно предположить, что при длинах волн λ, превосходящих по порядку величины ε возможны две структуры возмущенного вихревого движения, характеризующиеся разными масштабам по продольной координате. Этот вывод относится не только к данному профилю числа Маха $M_0(y)$, но и к любому другому профилю.

При численном расчете уравнения (16) с граничными условиями (17) были получены распределения скорости z по продольной координате y для различных значений числа Маха. Были также вычислены собственные значения α в зависимости от β. В качестве начального приближения

использовалась функция вида: $z_0(y) = y^6 / \exp y^2$. Для того, чтобы изучить влияние различных параметров течения, перейдем к новым переменным:

$$\eta = (2\zeta)^{-1/2} \int_0^y \rho dy\,,\ \rho = \frac{2}{(g - f'^2)(\gamma - 1)M_\infty^2}\,,\ M_0^2 = \frac{const f'^2}{(g - f'^2)}\,.$$

Таким образом, уравнение (16) принимает вид:

$$z'' + z' \frac{2f''g - 3f'g' + 4f'^2 f''}{2f'(g - f'^2)} + z(\beta_1(g - f'^2) + \frac{1}{\alpha^2}\frac{2f''g - f'g'}{2f'}) = 0 \qquad (18)$$

где f и g решения уравнений:

а) $f''' + ff'' = 0$, $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 1$.

б) $g'' + fg' = 0$, $g(0) = gw$, $g(\infty) = 1 + \dfrac{2}{(\gamma - 1)M_\infty^2}$

С учетом уравнений *а)* и *б)* уравнение (16) принимает следующий вид:

$z'' + A_0 z' + A_1 = 0$, где: $A_0 = 2(ff'' - g' + gf''/f')(g - f'^2)^{-1}$

$$A_1 = \left[(-B^2 + \alpha_1^{-2}(-g' + 2gf''/f')\right]$$

$$\alpha^2{}_1 = 2\alpha^2\left[(\gamma - 1)BM_\infty^2\right]^{-1},$$

$$M_0^2 = 2M_\infty^2[(\gamma - 1)(g - f'^2)],$$

$$\eta = (2\zeta)^{-1/2}\int \rho dy\,,\ B = 2^{1/2}\varepsilon/\lambda\,.$$

Уравнение (18) с теми же граничными условиями (17) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, которое решалось методом прогонки. Коэффициенты A_0 и A_1 этого уравнения определялись с помощью решения уравнений *а)* и *б)*. Можно привести следующую блок – схему решения уравнения (18). Для определения влияния на картину течения вблизи вогнутой поверхности как g_w, M_∞, γ, в случае сжимаемой жидкости:

1) решение уравнения: $f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) = 0$, $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 1$.

2) зададим параметры g_w, M_∞, γ и решаем следующее уравнение:

$$g''(\eta) + f(\eta)g'(\eta) = 0,\ g(0) = gw,\ g(1) = 1 + 2[(\gamma - 1)M_\infty^2]^{-1}$$

3) затем решаем уравнение (18) и находим значения α и значения функции z.

Путем варьирования значений g_w, M_∞, γ исследуем влияние этих параметров на распределение скорости z. На рисунках *4.1-4.3* представлены профили скорости z для различных значений g_w, M_∞, γ

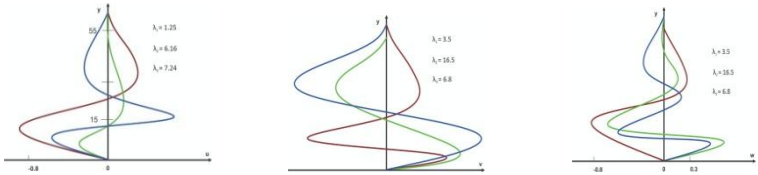

Рисунок 3.2- Профили скоростей *u, v, w* для первой, второй и третьей вихревой моды.

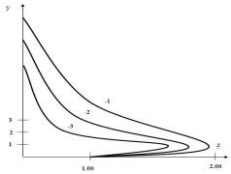

Рисунок 4.1- график распределения скорости z при:
1. m=0.2, g=2.5;γ =1.8;α =15;β =0.01.
2. m=0.2, g=0.6;γ =1.8;α =15;β =0.01.
3. m=0.2, g=2;γ =1.8; α =3.5;β =0.01.

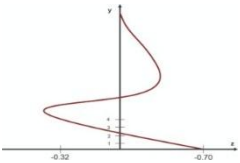

Рисунок 4.2 - График распределения скорости m=1,4; g=1,4; γ=1,8; α=15,0; β=0,01.

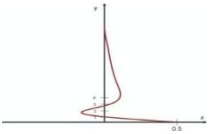

Рисунок 4.3- график распределения скор. z :m=5,2;α=0,5;β=0,5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Методом асимптотических разложений системы уравнений Навье-Стокса сформулирована трехмерная краевая задача с соответствующими граничными условиями при обтекании вогнутой поверхности потоком вязкой несжимаемой и сжимаемой жидкости в поле центробежных сил (вихри Гертлера) вблизи пограничного слоя при больших, но докритических значениях чисел Рейнольдса и Гертлера.

2. Получены численные результаты решения данной краевой задачи для коротковолнового режима изменения длин волн вихрей Гертлера (длина волны меньше толщины пограничного слоя): распределения компонент скорости по координате, зависимость местного числа Рейнольдса от инкремента роста амплитуды вихрей для первых трех основных вихревых мод.

3. Получены численные результаты решения данной краевой задачи также для коротковолнового режима изменения длин волн вихрей Гертлера (длина волны меньше толщины пограничного слоя):

исследовано влияние различных параметров на картину течения и распределение поперечной компоненты профиля скорости.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Жусупбекова, С.Т. Исследование динамики селевых и оползневых течений в пограничном слое вязкой жидкости [Текст] / У.М. Туганбаев, А.И. Бийбосунов, С.Т. Жусупбекова // Современные проблемы механики сплошных сред. – Бишкек, 2013. – №18. – С. 15-20.

2. Жусупбекова, С.Т. Исследование вихрей Гертлера-Тейлора в пограничном слое вблизи вогнутой поверхности [Текст] / А.И. Бийбосунов, С.Т. Жусупбекова // Современные проблемы механики сплошных сред. – Бишкек, 2013. – №19. – С. 16-22.

3. Жусупбекова, С.Т. Вывод краевой задачи при исследовании течения несжимаемой жидкости около вогнутой поверхности [Текст] / С.Т. Жусупбекова // Вестник Каз. нац. техн. ун-та. – Алматы, 2014. – №2 (102). – С. 387-390.

4. Жусупбекова, С.Т. Численный анализ краевой задачи обтекания вогнутой поверхности потоком вязкой жидкости [Текст] / С.Т. Жусупбекова // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2014. – С. 3-6. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23925397

5. Жусупбекова, С.Т. Исследование вихрей Гертлера в пограничном слое сжимаемой жидкости вблизи вогнутой поверхности [Текст] / А.И. Бийбосунова, С.Т. Жусупбекова // Качественное образование, передовая наука, зеленая экономика – будущее планеты: международная научно-практическая конференция. – Алматы, 2014. – №2 (50). – С. 391-393.

6. Жусупбекова, С.Т. Исследование основных характеристик течения в пограничном слое при обтекании вогнутой поверхности [Текст] / С.Т. Жусупбекова, А.И. Бийбосунов, Р.К. Абылгазиев, С.М. Суеркулов // Энергетика: состояние, проблемы, перспективы: междунар. науч. практич. конференция. – Бишкек, 2014. – С. 264-270.

7. Жусупбекова, С.Т. Прикладные аспекты теории пограничного слоя [Текст] / С.Т. Жусупбекова // Известие ВУЗов. – Бишкек, 2014. – №8. – С. 9-11. Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24908093

8. Жусупбекова, С.Т. Упрощение уравнений движения для несжимаемой жидкости методом асимптотических разложений [Текст] / С.Т. Жусупбекова // Журнал Сибирского федерального университета. – Красноярск, 2015. – Т. 8, №8. – С. 1040-1045. Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25509555

9. Жусупбекова, С.Т. К вопросу обтекания вогнутой поверхности потоком сжимаемой жидкости том / С.Т. Жусупбекова // Журнал

Сибирского федерального университета. – Красноярск, 2016. – Т. 9, №1. – С. 32-38. Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25645166

10. Жусупбекова, С.Т. Разработка научно-технологических основ для создания гидротранспортных топливно-энергетических комплексов с использованием угольных месторождений в сложных горно-геологических условиях. / С.Т. Жусупбекова, А.И. Бийбосунов // Современные проблемы механики. – Бишкек, 2017. – №29 (3). – С. 12-24. Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35296786

11. Жусупбекова, С.Т. Численное решение краевой задачи на собственные значения. / С.Т. Жусупбекова, А.И. Бийбосунов, Г.А. Джусупова // Международный научный журнал «Alatoo Academic Studies». – Бишкек, 2021. – №4. – С. 333-337. Режим доступа: https://www.alatoo.edu. https://elibrary.ru/title_about.asp?id=53910

12. Жусупбекова, С.Т. Четки катмарда суюктуктун агымын изилдоодогу математикалык ыкмалары [Текст] / А.И. Бийбосунов, С.Т. Жусупбекова, Н.А. Садыкова // Современные проблемы механики. – Бишкек, 2021. – №46. – С. 40-45.

01.02.05 - суюктуктун, газдын жана плазманын механикасы адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты илимий даражасы үчүн Жусупбекова Самара Төлөбековнанын «Асимптотикалык ыкмалар менен иймек беттеги (илээшкек) суюктуктун агымын изилдөө» деген темадагы диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: илээшкек суюктук, кысылбоочу суюктук, кысылуучу суюктук, Навье - Стокстун теңдемеси, четки катмар теориясы, илээшкектик коэффициенти, гидротурбина, борбордук күчтөр.

Изилдөөнүн объектиси: четки катмардын негизги теңдемелеринин теориялык жана методологиялык сүрөттөлүшү, иймек беттин четки катмарынын туруктуулугун изилдөө маселесин түзүү.

Изилдөөнүн предмети: четки катмардагы борбордук күчтөрүнүн (Гертлердин куюндары) илешкектүү кысылбаган жана кысылган суюктуктун агымынын тиешелүү чектик шарттары менен үч өлчөмдүү чектик маселенин асимптотикалык ажыратуу болуп саналат.

Иштин максаты: жалпы жагдайда жана куюндун узундугунун өзгөрүшүн мүнөздөгөн диапазондорго карата, суюктуктун жана газдын четки катмарда Гертлердин куюнун изилдөө болуп саналат.

Изилдөөнүн ыкмасы: Суюктуктун кысылуучулук жана кысылбоочулук кыймылы менен байланышкан маселерди изилдөөдө,

суюктуктун жана газдардын механикасынын негизин түзүүчү Навье-Стокстун тендемесин асимптотикалык ажыратуу ыкмасы колдонулат.

Иштин илимий жаңылыгы: иймек (ичин көздөй чункурайган) бетке жакын агымдардын буга чейин калыптанган модели изилденген жана кайра иштелип чыкты, аларды чыгарууда жаңы асимптотикалык ыкмалары сунушталды жана башка авторлордун иштери менен салыштырылды.

Колдонуу аймагы: жыйынтыктар жаны технологияларды түзүүдө жана учуучу аппараттарды долбоорлоодо, суунун күчү менен кыймылга келүүчү кыймылдаткычтарды иштетүүдө чоң салымын кошот.

РЕЗЮМЕ

диссертации Жусупбековой Самары Толобековны на тему: «Исследование течения вязкой жидкости вблизи вогнутой поверхности асимптотическими методами» представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы.

Ключевые слова: вязкая жидкость, несжимаемая жидкость, сжимаемая жидкость, уравнение Навье-Стокса, теория пограничного слоя, коэффициент вязкости, гидротурбина, центробежные силы.

Объект исследования: являются обтекание вогнутой поверхности набегающим потоком вязкой жидкости.

Предметом исследования: являются асимптотическое разложение трехмерной краевой задачи с соответствующими граничными условиями при обтекании вогнутой поверхности потоком вязкой несжимаемой и сжимаемой жидкости в поле центробежных сил (вихри Гертлера) вблизи пограничного слоя при больших, но докритических значениях чисел Рейнольдса и Гертлера.

Цель работы: исследование вихрей Гертлера в пограничном слое жидкости и газа в поле центробежных сил, как в общем случае, так и применительно к характерным диапазонам изменения длины волны вихрей.

Полученные результаты и их новизна: разработана и исследованы существующие модели течений вязкой жидкости вблизи вогнутой поверхности, предложены новые аналитические методы их решений, сравниваются с работами других авторов, где они встречаются.

Рекомендации: Результаты исследований могут быть использованы при создании новых технологий, мало турбулентных аэродинамических труб, проектировании перспективных летательных аппаратов.

RESUME

of the dissertation by Jusupbekova Samara Tolobekovna on the theme: "Study the flow of a viscous fluid near the concave surface by asymptotic methods" for the academic degree of the candidate of physical and mathematical sciences on specialty 01.02.05 - mechanics of fluids, gas and plasma.

Keywords: viscous fluid, incompressible liquid, coercible liquid, equations of Navier - Stoks, theory of frontier layer, coefficient of viscidity, hydro-turbine, centrifugal forces.

Object of research: When the flow around a concave surface is starting to show instability caused by centrifugal forces. In the boundary layer is excited by a pair of stationary vortices (Gertler's vortices) having opposite rotation and oriented along the flow. The phenomenon of Gertler's vortices plays a significant role in the operation of various hydraulic devices with the curvature of the flow and in initiating the transition of laminar to turbulent. For the mechanics of a viscous liquid and gas is fundamental to the phenomenon of the transition of laminar flow patterns in turbulent.

Goal of the work: Research of whirlwinds of Gertler in the frontier layer of liquid and gas in the field of centrifugal forces, both in general case and as it applies to the characteristic turn-downs of wave-length of whirlwinds.

Research methods: For solving dissertation before the work tasks were used as approximate analytical and numerical methods. In the theory of nonlinear boundary layer was computed asymptotic analysis of the Navier – Stokes equations for fluid and gas in the field of centrifugal forces at high values of the Reynolds and Gertler. When the solution of the formulated boundary-value problems, applied, finite – difference methods.

Results and novelty: Designed and researched existing models flow of a viscous fluid near a concave surface, the proposed new analytical methods for their solutions, are compared with the works of other authors, where they meet.

Recommendations: The research results can be used to create new technology, there is little turbulent wind tunnels, the design of advanced aircraft

Формат 60x84 $^{1}/_{16}$ бумага офсетная. Объем 1,5 печ. листа.
Тираж 50 экз.

Отпечатано ОсОО «Кут-Бер» г. Бишкек, ул. Медерова, 68