Национальная академия наук Кыргызской Республики
Институт математики
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына

Диссертационный совет Д 01.22.647

На правах рукописи
УДК 515.12

Байджуранова Анара Мелебековна

О некоторых свойствах компактности и полноты равномерных пространств и их отображений

01.01.04 - геометрия и топология

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2022

Работа выполнена в лаборатории топологии и функционального анализа Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики.

Научный руководитель: Канетов Бекболот Эменович
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой алгебры, геометрии,
топологии и преподавания высшей математики
имени академика А.А. Борубаева Кыргызского
национального университета имени
Жусупа Баласагына

Официальные оппоненты: Садовничий Юрий Викторович
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой обшей топологии и
геометрии Московского государственного
университета имени М.В. Ломоносова (Россия)

Кочинац Любиша
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор Нишского университета (Сербия)

Ведущая организация: Кафедра математики и естественных дисциплин
Ташкентского архитектурно-строительного
института, 100174, Узбекистан, г. Ташкент,
ул. А. Навои 13.

Защита диссертации состоится 9 декабря 2022 г. в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.22.647 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызская Республика, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй 265-а, кабинет 374.

Идентификатор защиты - https://vc1.vak.kg/b/012-ltf-b7j-lgy

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Национальной академии наук Кыргызской Республики (720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а, и Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына (720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547) и на сайтах: www.vak.kg, www.math.kg.

Автореферат разослан 8 ноября 2022 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент Шаршембиева Ф. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Теория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений является одним из основных направлений теоретико-множественной топологии, а равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения давно заняли важное место в самой теоретико-множественной топологии и в ее применениях.

М. Фреше [М. Фреше., 1906 г.] ввел понятие метрического пространства – равномерного пространства специального типа. Теория метрических пространств приобретает особую важность, благодаря фундаментальным работам Ф. Хаусдорфа [Ф. Хаусдорф., 1914 г.] и С. Банаха [С. Банах., 1920 г.].

Когда в математику вошли неметризуемые пространства, стало необходимым создание естественной структуры, выражающей идею равномерности, связанной, в первую очередь, с понятием полноты и равномерно непрерывной функции. Это привело Д. Курепа [Д. Курепа., 1934 г.] и А. Вейля [А. Вейль., 1937 г.] к определению понятия равномерного пространства и к созданию основ теории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений.

В настоящее время равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения обладают исторически и логически обоснованной, стройной и далеко продвинутой теорией, имеющей приложения в различных областях математики, благодаря фундаментальным работам Д. Курепа, А. Вейля, Н. Бурбаки, Ж. Дьедонне, Ю.М. Смирнова, А.А. Борубаева, В.А. Ефремовича, Дж. Исбелла, М. Катетова, К. Мориты, Б.А. Пасынкова, П. Самюэля, Дж. Тьюки, З. Фролика, В.В. Федорчука, Ю.В. Садовничего, А.А. Чекеева, Б.А. Болжиева. Интересные результаты по теории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений получены в работах М.Я. Антоновского, А.В. Архангельского, Д. Дойчинова, А.А. Иванова, Л. Кочинаца, В. Кульпы, А.П. Шостака, Е. Майкла, С. Широта, В.И. Пономарева, М.Д. Райса, М.М. Чобана, Е.В. Щепина и др.

Для развития исследований в равномерной топологии З. Фроликом [З. Фролик., 1983 г.] на семинаре по топологии Карловского университета поставлена униформизационная проблема: найти и исследовать равномерные аналоги важнейших классов топологических пространств и непрерывных отображений.

Предкомпактность, пред-Линделёфовость и специфическое равномерное свойство – свойство полноты принадлежат к числу важнейших изучаемых в равномерной топологии инвариантов. Теория этих инвариантов весьма обширна и продолжает распространяться вширь и вглубь. Исходя из этих и близких к ним инвариантов, в частности, получаются новые, т.е. еще не исследованные направления, например, теория игр на равномерных пространствах.

Исследования показали, что при построении различных расширений,

равномерная структура является универсальной и естественной.

В последнее время многие понятия и утверждения равномерной топологии были распространены со случая пространств на случай равномерно непрерывных отображений.

Проведенные исследования выявили большие равномерные аналоги непрерывных отображений и позволили перенести на отображения многие основные утверждения равномерной топологии пространств. Однако при построении пополнений равномерно непрерывных отображений крайне мало исследованы типы компактификаций равномерно непрерывных отображений и как следствие не изученным оказался Хьюиттовская вещественная компактификация равномерно непрерывных отображений.

Поэтому исследования некоторых важнейших свойств типа компактности и полноты равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений являются актуальным.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами. Диссертация выполнена в рамках проекта Института математики на тему «Развитие асимптотических, топологических и аналитических методов в теории равномерных, топологических и кинематических пространств, эволюционных систем, оптимизационных экономических задач, математическом моделировании» (2018-2020 г.г.). Результаты диссертации включены в отчеты по этому проекту.

Цель и задачи исследования. Установить характеристики важнейших свойств типа компактности и полноты равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений.

Для достижения цели определены следующие задачи:

– Исследовать предкомпактность, пред-Линделёфовость, счетно предкомпактность, полноту, равномерно Менгера пространства равномерных пространств.
– Исследовать Хюиттовскую вещественную компактификацию равномерных пространств.
– Исследовать игры на равномерных пространствах.
– Построить Хюиттовскую вещественную компактификацию равномерно непрерывных отображений.
– Построить компактификацию и наросты конечного порядка равномерно непрерывных отображений.

Научная новизна. Впервые охарактеризованы важнейшие классы типа компактности и полноты равномерных пространств. Даны характеристики Хюиттовской вещественной компактификации равномерных пространств. Найдены критерии выигрышных стратегий игроков в

играх на равномерных пространствах. Доказана секвенциальная полнота счетно паракомпактных пространств. Построены Хюиттовские вещественные компактификации равномерно непрерывных отображений. Построены компактификации и наросты конечного порядка равномерно непрерывных отображений. Найдено необходимое и достаточное условие равномерной совершенности наростов конечного порядка равномерно непрерывных отображений.

Практическая значимость полученных результатов диссертации состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях равномерной топологии, а также при чтении специальных курсов в вузах.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

– Установление различные характеристики предкомпактных, пред-Линделёфовых, счетно предкомпактных и равномерно Менгера пространств.

– Установление характеристики Хьюиттовской вешественной компактификации равномерных пространств.

– Доказательство секвенциальной полноты счетно паракомпактных пространств.

– Установления критериев выигрышных стратегий игроков на равномерных пространствах.

– Перенесение Хюиттовской вещественной компактификации на равномерно непрерывные отображения.

– Построение компактификации и наросты конечного порядка равномерно непрерывных отображений.

– Установление критерия равномерной совершенности наростов конечного порядка равномерно непрерывных отображений.

Личный вклад соискателя. Цели и задачи исследования диссертации определены научным руководителем Б.Э. Канетовым. В диссертационную работу включены материалы, которые принадлежат автору.

Апробация результатов исследований. Основные результаты исследований докладывались и обсуждались на научных семинарах Института математики НАН КР под руководством академика А.А. Борубаева и на следующих научных конференциях:

– II, III Борубаевских чтениях (г. Бишкек, 2018, 2019);

– Международной научной конференции «International workshop Fuzzy and Rough Mathematical Structures» (FARMS), (г. Рига, Латвия, 2019).

– Международной научной конференции «III International Conference of Mathematical Sciences» (ICMS), (г. Стамбул, Турция, 2019).

– Международной научной конференции «IV International Conference of Mathematical Sciences» (ICMS), (г. Стамбул, Турция, 2020).

– Международной научной конференции «Analysis, Topology and Applications» (ATA 22), (г. Врнячка-Баня, Сербия, 2022).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1] - [9], приведенных в списке использованных литератур. В работах [1] - [6] и [8] полученные результаты принадлежат соискателю, а соавторам - постановка задач и обсуждение полученных результатов. Статьи [2], [5], [6] входят в базу данных Web of Science и Scopus, статьи [1], [3], [4], [7], [8] входят в базу данных РИНЦ КР.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, четырех глав, выводов, списка использованных источников из 72 наименований. Нумерация разделов - тройная: первая цифра указывает номер главы, вторая - номер раздела в главе, третья - порядковый номер в разделе. Объем текста - 108 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ» содержит краткий анализ основных этапов развития теоретико-множественной топологии связанной с тематикой настоящей диссертации. Она состоит из четырех разделов. В разделе 1.1. «Свойства типа компактности и полноты равномерных пространств» приведены ранее полученные результаты других авторов и приведены не решенные задачи. В разделе 1.2. «Равномерно совершенные, предкомпактные и полные отображения» дана краткая информация о равномерно совершенных, предкомпактных и полных отображениях и выделены те задачи равномерно непрерывных отображений, которые остались не решенными. В разделе 1.3. «О топологических играх» отмечены не решенные задачи игры на равномерных пространствах. В заключении первой главы отмечено, что на основании проведенных анализов диссертационное исследование актуально.

Вторая глава «МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» состоит из четырех разделов. В разделе 2.1. «Объект и предмет исследования» приведены объекты и предметы исследования:

Объект исследования. Теоретико-множественная топология.

Предмет исследования. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения.

В разделе 2.2. «Методы исследования в равномерных пространствах» подробно с конкретными примерами изложены используемые в данной диссертации методы: метод покрытий и метод фильтров Коши. В разделе 2.3.

«Методы исследования в равномерно непрерывных отображениях» также, подробно с конкретными примерами изложены используемые в данной диссертации метод взаимной классификации пространств и отображений. В заключении второй главы отмечено о возможности и целесообразности решения конкретно поставленных задач этими методами.

Третья глава «НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КОМПАКТНОСТИ И ПОЛНОТЫ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ» состоит из шести разделов. В разделе 3.1. «Пред-Линделёфовы и счетно предкомпактные равномерные пространства» изучены предкомпактные, пред-Линделёфовы и счетно предкомпактные пространства.

Основные результаты этого раздела таковы:

Равномерное пространство (X,U) называется пред-Линделёфовым, если равномерность U имеет базу B, состоящую из счетных покрытий.

Следующая лемма играет ключевую роль для дальнейших построений.

Лемма 3.1.1. Равномерное пространство (X,U) пред-Линделёфово тогда и только тогда, когда каждое равномерное покрытие содержит счетное подпокрытие.

Следующая теорема устанавливает сохранение свойства пред-Линделёфовости при предкомпактных отображениях в обе стороны.

Теорема 3.1.1. При предкомпактных равномерно непрерывных отображениях пред-Линделёфовость сохраняется как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

Равномерное пространство (X,U) называется счетно предкомпактным, если каждое счетное равномерное покрытие содержит конечное подпокрытие.

Всякое предкомпактное равномерное пространство является счетно предкомпактным.

Характеристика счетно компактных тихоновских пространств, при помощи универсальных равномерных структур устанавливается в следуюшей теореме.

Теорема 3.1.6. Тихоновское пространство X является счетно компактным тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U_X) является счетно предкомпактным, где U_X - универсальная равномерная структура.

Характеристика линделёфовых пространств при помощи универсальных равномерных структур приводится в следующей теореме.

Теорема 3.1.7. Тихоновское пространство X является линделёфовым тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U_X) является пред-Линделёфовым, где U_X - универсальная равномерная структура.

В следующей теореме устанавливается характеристика компактных тихоновских пространств посредством универсальных равномерных структур.

Теорема 3.1.8. Тихоновское пространство X является компактным тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U_X) является счетно

предкомпактным и пред-Линделёфовым, где U_X - универсальная равномерная структура.

Теорема 3.1.9. Равномерное пространство (X,U) является предкомпактным тогда и только тогда, когда пространство (X,U) является пред-Линделёфовым и счетно предкомпактным.

Теорема 3.1.9. является равномерным аналогом теоремы о том, что тихоновское пространство компактно тогда и только тогда, когда оно линделёфово и счетно компактно.

В разделе 3.2. «Равномерно Менгера пространства» изучены равномерно Менгера пространства.

Класс равномерно Менгера пространств, впервые введен и исследован Л. Кочинацом [Л. Кочинац., 2003 г.].

Из определения равномерно Менгера пространства следует, что оно промежуточно между предкомпактными и пред-Линделёфовыми пространствами и, следовательно, должно обладать многими хорошими свойствами. Оказываются, эти надежды являются вполне оправданными.

Следующая теорема является характеристикой Менгера пространства при помощи универсальных равномерных пространств.

Теорема 3.2.2. Тихоновское пространство X является Менгера пространством тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U_X), где U_X - универсальная равномерность, является равномерно Менгера пространством.

При предкомпактных равномерно непрерывных отображениях равномерно Менгера свойство сохраняется в обе стороны, это показывает следующая теорема.

Теорема 3.2.4. При предкомпактных отображениях равномерно Менгера свойство сохраняется как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

Следствие 3.2.1. При равномерно совершенных отображениях равномерно Менгера свойство сохраняется в обе стороны.

Пространство действительных чисел R с естественной равномерностью является равномерно Менгера пространством, но не предкомпактным пространством.

Пространство рациональных чисел Q индуцированной из равномерности U_R и единичный интервал $(0,1)$ индуцированной из равномерности U_R также являются равномерно Менгера пространствами.

В следующей теореме дается необходимое и достаточное условие, для того, чтобы нарост обладал равномерным свойством Менгера.

Теорема 3.2.6. Нарост $(\tilde{X}\setminus X,\tilde{U}_{\tilde{X}\setminus X})$ равномерного пространства (X,U) является равномерно Менгера пространством тогда и только тогда, когда для любой последовательности существует $\{\alpha_n\}\subset U$ такая последовательность $\{\alpha_n^0\}$ конечных подсемейств, что $\bigcup_{n\in N}\alpha_n^0$ является ко-покрытием равномерного пространства (X,U).

Любое компактное равномерное пространство является равномерно Менгера пространством.

В отличие от предкомпактных и пред-Линделёфовых пространств имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2.7. Произведение $(X \times Y, U \times V)$ равномерно Менгера пространства (X, U) на предкомпактное равномерное пространство (Y, V) является равномерно Менгера пространством.

В разделе 3.3. «Хьюиттовская вещественная компактификация равномерных пространств» изучен вопрос о характеризации Хьюиттовской вещественной компактификации равномерных пространств.

Хьюиттовская вещественная компактификация тихоновского пространства была введена Хьюиттом [Хьюит., 1948 г.] , а для равномерных пространств - А.А. Борубаевым [А.А. Борубаев., 1990 г.].

Как известно, существуют разные способы построения Хьюиттовской вещественной компактификации равномерных пространств.

Предлагается другой способ построения Хьюиттовской вещественной компактификации равномерного пространства.

Теорема 3.3.1. Пусть (X,U) - произвольное равномерное пространство. Тогда существует пред-Линделёфова равномерность U_l на X , удовлетворяющая следующим условиям:

1) $U_l \subset U$;
2) топологии, порожденные U_l и U совпадают;
3) U_l - наибольшая пред-Линделефова равномерность, содержащаяся в U.

Равномерность U_l называется пред-Линделёфовой рефлекцией равномерности U , а пополнение $(\tilde{X},\tilde{U}_l)$ равномерного пространства (X,U_l) называется вещественной компактификацией равномерного пространства (X,U) по Хьюитту.

Вещественная компактификация Хьюитта равномерного пространства (X,U) обозначается $(\nu X,\nu U)$.

Если U_X - универсальная равномерность тихоновского пространства X , то $(\nu X,\nu U)$ - хьюиттовское расширение тихоновского пространства X .

В следующих двух теоремах устанавливаются характеристики Хьюиттовской вещественной компактификации равномерного пространства.

Теорема 3.3.3. Для каждого равномерного пространства (X,U) существует ровно одно (с точностью до равномерного изоморфизма) вещественно полное пространство $(\nu X,\nu U)$, обладающее следующими двумя свойствами:

1) Существует равномерно изоморфное вложение $i:(X,U)\to(\nu X,\nu U)$, для которого $[i(X)]_{\nu X} = \nu X$.
2) Какова бы ни была равномерно непрерывная вещественная функция $f:(X,U)\to(R,U_R)$, существует равномерно непрерывная функция

$\hat{f}:(\nu X,\nu U)\to(R,U_R)$, такая, что $\hat{f}\circ i=f$.

Теорема 3.3.4. Для каждого равномерно непрерывного отображения $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в любое Хьюиттовски полное равномерное пространство (Y,V) существует равномерно непрерывное отображение $\hat{f}:(\nu X,\nu U)\to(Y,V)$, такое, что $\hat{f}\circ i=f$, где $i:(X,U)\to(\nu X,\nu U)$ - равномерно изоморфное вложение.

Пусть (X,U) - равномерное пространство. Через $C(X)$ обозначается кольцо всех непрерывных вещественных функций на X. Напомним, что идеалом в $C(X)$ называется произвольное собственное подмножество Δ кольца $C(X)$ такое, что если $f,g\in\Delta$, то $f+g\in\Delta$, и если $f\in\Delta$ и $g\in C(X)$, то $fg\in\Delta$. Идеал Δ называется максимальным, если для любого идеала Δ' такого, что $\Delta'\supset\Delta$, имеет место равенство $\Delta=\Delta'$.

Функционал φ на $C(X)$, сопоставляющий каждому $f\in C(X)$ вещественное число $\varphi(f)$ называется линейно-мультипликативным, если для всех f_1,f_2 и всех вещественных чисел t_1,t_2 выполняются условия: $\varphi(t_1f_1+t_2f_2)=t_1\varphi(f_1)+t_2\varphi(f_2)$ и $\varphi(f_1\cdot f_2)=\varphi(f_1)\cdot\varphi(f_2)$. Функционал φ называется нетривиальным, если существует функция f, для которой $\varphi(f)\neq 0$. Функционал φ определяется точкой $x\in X$, если $\varphi(f)=f(x)$ при всех f.

В следующей теореме составляется мостик между нетривиальными линейно-мультипликативными функционалами и точками Хьюиттовской вещественной компактификации равномерного пространства.

Теорема 3.3.5. Существует взаимно однозначное соответствие между нетривиальными линейно-мультипликативными функционалами на $C(X)$ и точками Хьюиттовской вещественной компактификации $(\nu X,\nu U)$ равномерного пространства (X,U).

В разделе 3.4. «О с-полных равномерных пространствах» изучены с-полные и секвенциально с-полные равномерные пространства.

Фильтр F в равномерном пространстве (X,U) называется слабым фильтром Коши, если для любого $\alpha\in U$ существует такое $A\in\alpha$, что $A\cap L\neq\varnothing$ для любого $L\in F$.

Минимальные по включению элементы множества всех слабых фильтров Коши в равномерном пространстве (X,U) называются минимальными слабыми фильтрами Коши в (X,U).

В следующем предложении дается методика построения минимального слабого фильтра Коши.

Предложение 3.4.4. Пусть (X,U) - равномерное пространство. Для каждого слабого фильтра Коши F в (X,U) существует, и притом единственный, минимальный слабый фильтр Коши F_0, содержащийся в F; пусть A - база фильтра F и B - база равномерности U. Тогда семейство $\{\alpha(A):A\in\mathrm{A},\alpha\in B\}$ образует базу фильтра F_0.

Далее исследуются (секвенциально) с-полные равномерные пространства.

Равномерное пространство называется (секвенциально) с-полным, если всякий слабый фильтр Коши (имеющий счетную базу) в нем сходится.

В следующей теореме устанавливается эквивалентность двух понятий, а именно секвенциальной полноты и счетно равномерной паракомпактности равномерных пространств.

Теорема 3.4.2. Для равномерного пространства (X,U) следующие условия равносильны:

1. (X,U) - секвенциальнос-полно;
2. (X,U) - счетно равномерно паракомпактно.

Следующая теорема является характеристикой μ -паракомпактных пространств при помощи универсальных равномерных структур.

Теорема 3.4.3. Тихоновское пространство X является счетно паракомпактным в том и только в том случае, если равномерное пространство (X,U_X) с универсальной равномерностью U_X является секвенциально с-полным.

Из теоремы 3.4.2. следует

Теорема 3.4.4. Всякое счетно равномерно паракомпактное пространство секвенциально полно.

Теорема 3.4.4. является положительным решением проблемы, поставленной Б.А. Болжиевым:

«Является ли всякое счетно равномерно паракомпактное пространство секвенциально полным пространством?»

В разделе 3.5. «Игры Л. Кочинаца на равномерных пространствах» изучены разные игры Л. Кочинаца на равномерных пространствах.

Хорошо известно, что в последнее время интенсивно развивается теория игр которая, в принципе, может вестись на любом пространстве: на метрических пространствах, на топологических группах, на топологических векторных пространствах, на пространствах функций и т.п., например, классическая игра Банаха-Мазура на отрезке вещественной прямой.

Практически все известные математические игры используют в качестве выбираемых объектов. Самые простые атрибуты данного пространства: точки, векторы, функции, открытые или замкнутые множества, равномерные покрытия и т.п.

Топологические игры исследовались многими авторами, начиная Шоке. Наиболее интересные результаты получены Уайтом, Бернером, Юхасом, Гринхаге, Кочинацом, Шиперсом, Цабаном, Малыхиным, Ранчином, Ульяновым, Шапировским, Ткаченко и др.

Игры на равномерных пространствах впервые исследовались, видимо, Л. Кочинацом.

Каждому принципу выбора для равномерных пространств естественно

сопоставляется соответствующая игра, поэтому принцип выбора можно охарактеризовать как игра на равномерных пространствах.

Рассматривается три игры на равномерном пространстве:

Первая игра Кочинаца. Пусть дано равномерное пространство (X,U). Правила игры UG_1 таковы: Два игрока - I и II играют в партию для каждого положительного целого числа n. В n-м ходу I выбирает равномерное покрытие $\alpha_n \in U$, а II выбирает конечное подсемейство β_n. Побеждает II, если $\bigcup_{n\in N} \beta_n$ есть покрытие пространства (X,U), в противном случае побеждает I.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.5.1. Пусть дано равномерное пространство (X,U). Равномерное пространство (X,U) является равномерно Менгера пространством тогда и только тогда, когда I игрок не имеет выигрышную стратегию в UG_1.

Вторая игра Кочинаца. Пусть дано равномерное пространство (X,U). Правила второй игры UG_2 таковы: Два игрока - I и II играют в партию для каждого положительного целого числа n. В n-м ходу I выбирает равномерное покрытие $\alpha_n \in U$, а II выбирает конечное подсемейство β_n. Побеждает II, если $x \in \bigcup_{n\in N} \beta_n$ для каждого $x \in X$ в противном случае побеждает I.

Аналогично имеет место следующая теорема

Теорема 3.5.2. Пусть (X,U) равномерное пространство. Равномерное пространство (X,U) является равномерно Гуревича пространством тогда и только тогда, когда I игрок не имеет выигрышную стратегию в UG_2.

Теорема 3.5.3. Пусть (X,U) равномерное пространство. Второй игрок II имеет выигрышную стратегию в UG_2 тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U) является σ-предкомпактным.

Третья игра Кочинаца. Пусть дано равномерное пространство (X,U). Правила игры UG_3 таковы: Два игрока - I и II играют в партию для каждого положительного целого числа n. В n-м ходу I выбирает равномерное покрытие $\alpha_n \in U$, а II выбирает конечное подсемейство β_n. Побеждает II, если $\bigcup_{n\in N} U_n = X$, $U_n \in \bigcup \beta_n$, в противном случае побеждает I.

В этом случае также имеет место следующая аналогичная теорема

Теорема 3.5.4. Пусть дано равномерное пространство (X,U). Равномерное пространство (X,U) является равномерно Ротбергера пространством тогда и только тогда, когда I игрок не имеет выигрышную стратегию в UG_3.

Теорема 3.5.5. Пусть (X,U) равномерное пространство. Второй игрок II имеет выигрышную стратегию в UG_3 тогда и только тогда, когда (X,U) является счетно дискретным пространством.

Теорема 3.5.3. и 3.5.5. являются решениями задач, поставленными Л. Кочинацом.

Четвертая глава «КОМПАКТИФИКАЦИЯ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ» состоит из четырех раздела. В разделе 4.1.

«Пред-Линделёфово отображение» изучены различные характеристики пред-Линделёфова отображения.

Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется пред-Линделёфовым отображением, если отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ имеет базу U_f, состоящую из счетных покрытий.

Следующая теорема показывает сохранение свойства пред-Линделёфовости при пред-Линделёфовых отображениях как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

Теорема 4.1.1. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - пред-Линделёфово отображение равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V). Тогда пред-Линделёфовость сохраняется как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

Теорема 4.1.2. Произведение $f=\prod_{a\in M} f_a$, где $f_a:(X_a,U_a)\to(Y_a,V_a)$, $a\in M$, является пред-Линделёфовым тогда и только тогда, когда все сомножители f_a пред-Линделёфовы.

В разделе 4.2. «Хьюиттовская вещественная компактификация равномерно непрерывных отображений» изучен вопрос о построении Хьюиттовской вещественной компактификации равномерно непрерывных отображений.

Здесь дается решение задачи, поставленной А.А. Борубаевым о построении Хьюиттовской вещественной компактификации равномерно непрерывных отображений. Понятие Хьюиттовской вещественной компактификации равномерно непрерывных отображений является обобщением соответствующих понятий для пространств.

Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V). Пусть отображение f имеет базу U_f, состоящую из счетных равномерных покрытий пространства (X,U). Рассмотрим пополнение $\hat{f}:(\hat{X},\hat{U})\to(Y,V)$ отображения $f:(X,U)\to(Y,V)$. Положим $\hat{f}=\hat{\nu}f$, $\hat{X}=\hat{\nu}X$ и $\hat{U}=\hat{\nu}U$. Равномерно непрерывное отображение $\hat{\nu}f:(\hat{\nu}X,\hat{\nu}U)\to(Y,V)$ равномерного пространства $(\hat{\nu}X,\hat{\nu}U)$ в равномерное пространство (Y,V) назовем Хьюиттовской вещественной компактификацией отображения f.

Следующая теорема показывает существование Хьюиттовской вещественной компактификации для всякого равномерно непрерывного отображения.

Теорема 4.2.1. Всякое равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) имеет Хьюиттовскую вещественную компактификацию.

В разделе 4.3. «Компактификация и нарост конечного порядка равномерно непрерывных отображений» изучен вопрос о построении компактификации и наросты конечного порядка равномерно непрерывных отображений.

Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V). Равномерно непрерывное отображение $\hat{f}:(\hat{X},\hat{U})\to(Y,V)$ равномерного пространства $(\hat{X},\hat{U})$ в равномерное пространство (Y,V) называется компактификацией отображения f, если выполняются следующие условия:

1. (X,U) - всюду плотно в $(\hat{X},\hat{U})$.
2. $f=\hat{f}|_X$.
3. Отображение $\hat{f}$ является равномерно совершенным.

Теорема 4.3.1. Всякое равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) имеет компактификацию.

Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется локально равномерно совершенным в точке $x\in X$, если существуют открытое множество O и замкнутое подпространство (M,U_M) равномерного пространства (X,U) такие, что $x\in O\subset M$, fM замкнуто в (Y,V) и сужение $f|_M$ равномерно совершенно.

Внешняя характеристика локально равномерной совершенности дана в следующей теореме.

Теорема 4.3.2. Для того, чтобы равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) являлось локально равномерно совершенным необходимо и достаточно, чтобы X было открытым в $(\hat{X},\hat{U})$.

Пусть $\hat{f}:(\hat{X},\hat{U})\to(Y,V)$ - компактификация равномерно непрерывного отображения $f:(X,U)\to(Y,V)$. Отображение $\hat{f}|_{\hat{X}\setminus X}:(\hat{X}\setminus X,\hat{U}_{\hat{X}\setminus X})\to(Y,V)$ называется наростом равномерно непрерывного отображения $f:(X,U)\to(Y,V)$.

Необходимое и достаточное условие равномерной совершенности нароста равномерно непрерывного отображения дано в следующей теореме.

Теорема 4.3.3. Нарост $\hat{f}|_{\hat{X}\setminus X}:(\hat{X}\setminus X,\hat{U}_{\hat{X}\setminus X})\to(Y,V)$ равномерно непрерывного отображения $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерно совершенен тогда и только тогда, когда равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ является локально равномерно совершенным.

Далее рассматривается вопрос о построении компактификации n-го порядка и нарост n-го порядка равномерно непрерывных отображений.

Пусть $\hat{f}:(\hat{X},\hat{U})\to(Y,V)$ - компактификация равномерно непрерывного отображения $f:(X,U)\to(Y,V)$.

Последовательность $(f_0,\hat{f}_0,\hat{f}_1,...,\hat{f}_{n-1})$ равномерно непрерывных отображений $f_0,\hat{f}_0,\hat{f}_1,...,\hat{f}_{n-1}$, где $f_0:(X_0,U_0)\to(Y,V)$, $X_0=X$, $f_0=f$, $\hat{f}_{i-1}:(\hat{X}_{i-1},\hat{U}_{i-1})\to(Y,V)$ - компактификация равномерно непрерывного отображения f_{i-1}, f_i - сужение равномерно непрерывного отображения f_{i-1} на равномерном пространстве

$(\hat{X}_{i-1} \setminus X_{i-1}, \hat{U}_{\hat{X}_{i-1} \setminus X_{i-1}})$ при $1 \le i \le n$, называется компактификацией n-го порядка равномерно непрерывного отображения $f:(X,U) \to (Y,V)$, а f_n - наростом n-го порядка равномерно непрерывного отображения f.

Компактификация нулевого порядка и нарост нулевого порядка равномерно непрерывного отображения f считается отображение f.

Очевидно, что нарост нулевого порядка равномерно совершенен тогда и только тогда, когда отображение f равномерно совершенно.

Критерий равномерной совершенности наростов n-го порядка равномерно непрерывных отображений дается в следующей теореме.

Теорема 4.3.4. Нарост n-го порядка равномерно непрерывного отображения $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерно совершенен тогда и только тогда, когда нарост $n-1$-го порядка равномерно непрерывного отображения $\hat{f}|_{\hat{X} \setminus X}:(\hat{X} \setminus X, \hat{U}_{\hat{X} \setminus X}) \to (Y,V)$ локально равномерно совершенен.

Теорема 4.3.4. является решением задачи, поставленная А.А. Борубаевым: «При каких необходимых и достаточных условиях нарост конечного порядка равномерно непрерывного отображения обладает равномерно совершенным свойством?»

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

– Получены различные характеристики предкомпактных, пред-Линделёфовых, счетно предкомпактных и равномерно Менгера пространств.
– Установлены характеристики Хьюиттовской вещественной компактификации равномерных пространств.
– Доказана секвенциальная полнота счетно паракомпактных пространств.
– Найдены критерии выигрышных стратегий игроков на равномерных пространствах.
– Распространена Хюиттовская вещественная компактификация равномерных пространств на равномерно непрерывные отображения.
– Построены компактификации и наросты конечного порядка равномерно непрерывных отображений.
– Найден критерий равномерной совершенности наростов конечного порядка равномерно непрерывных отображений.

В заключении автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Канетову Бекболоту Эменовичу за постановку задач, постоянное внимание к работе и всестороннюю помощь.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Научные результаты диссертации могут быть применены в теории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, в теории

топологических игр, в теории топологических и равномерных групп, в функциональном анализе, а также при чтении специальных курсов в вузах.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Байджуранова, А.М. О (сильно) τ - финально паракомпактных и равномерно τ - финально паракомпактных пространствах [Текст] / Б.Э. Канетов, А.М. Байджуранова, Жолдошбек кызы Г // Известия вузов Кыргызстана. – № 7. – 2019. – С. 3-7. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42371520
2. Baidzhuranova, A.M. On a Uniform Analogue of Paracompact Spaces [Text] / B.E. Kanetov, A.M. Baidzhuranova // AIP Conference Proceedings “3rd International conference of mathematical sciences” (ICMS 2019). – 2019. – Vol. 2183. – P. 030009–1-030009–3. - Режим доступа: https://doi.org/10.1063/1.5136113
3. Байджуранова, А. М. Равномерные паракомпактные пространства [Текст] // Б.Э. Канетов, А.М. Байджуранова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына, Спец.вып. – 2019. – С. 109- 113. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42443566
4. Baidzhuranova, A.M. On the Theory of Compactification of Mapping [Text] / B.E. Kanetov, A.M. Baidzhuranova, B.A. Almazbekova // – Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR. – № 1. – 2020. – P. 12-18. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49330003
5. Baidzhuranova, A.M. Totally Bounded Remainders of Uniform Spaces and Samuel Compactification of Uniformly Continuous Mappings [Text] / B.E. Kanetov, U.A. Saktanov, A.M. Baidzhuranova // AIP Conference Proceedings “4th International conference of mathematical sciences” (ICMS 2020). – 2021. – Vol. 2334. – P. 020013–1-020013–4. - Режим доступа: https://doi.org/10.1063/5.0046220
6. Baidzhuranova, A.M. Paracompact-type mappings [Text] / B.E. Kanetov, A.M. Baidzhuranova // Bulletin of the Karaganda University, Mathematics Series. – 2021. - №2(102). – P. 62-66. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46270638
7. Baidzhuranova, A.M. Uniform Menger Space [Text]] / A.M. Baidzhuranova // – Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR. – № 2. – 2021. – P. 31-36. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49308078
8. Baidzhuranova, A.M. On Precompact uniform structures [Text]] / A.A. Chekeev, B.E. Kanetov, A.M. Baidzhuranova, N. Zhusupbekova // – Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR. – № 1. – 2022. – P. 31-34. - Режим доступа: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49328816
9. Байджуранова, А.М. О μ -предкомпаткных равномерных структурах [Текст] / А.М. Байджуранова // Известия вузов Кыргызстана. – № 5. – 2022. – С. 12-15.

Байджуранова Анара Мелебековнанын 01.01.04 - геометрия жана топология адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн «Бир калыптуу мейкиндиктердин жана алардын чагылдырууларынын компактуулугунун жана толуктугунун айрым касиеттери жөнүндө» деген темадагы диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр. Пред-Линделёфдукмейкиндик, бир калыптуу Менгер мейкиндик, с-толук мейкиндик, бир калыптуу мейкиндиктердин Хьюиттик чыныгы компактификациясы, бир калыптуу мейкиндиктердегиоюндар,бир калыптуу үзгүлтүкуз чагылдыруулардын компактификациясы, бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулардын өсүндүсү.

Изилдөөнүн объектиси. Теориялык-көптүктүк топология.

Изилдөөнүн предмети. Бир калыптуу мейкиндиктер, бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулар, топологиялык оюндар.

Изилдөөнүн максаты. Бир калыптуу мейкиндиктердин компакттуулугу жана толуктугу, бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулардын маанилүү касиеттеринин мүнөздөмөлөрүн тургузуу.

Изилдөөнүн усулдары. Жабдуу ыкмасы, Коши фильтри ыкмасы жана мейкиндиктерди жана чагылдырууларды өз-ара классификациялоо ыкмасы колдонулган.

Алынган жыйынтыктар жана алардын илимий жаңылыгы. Предкомпактуу, пред-Линделёфдук, санактуу предкомпактуу жана бир калыптуу Менгер мейкиндиктеринин ар кандай мүнөздөмөлөрү алынган. Бир калыптуу мейкиндиктердин Хьюиттик чыныгы компактификациясынын мүнөздөмөлөрү тургузулган. Санактуу паракомпактуу мейкиндиктериндин секвенциалдуу толуктугу далилденген. Бир калыптуу мейкиндиктерде оюнчулардын утуп алуу стратегиялары үчүн критерийлер табылган. Бир калыптуу мейкиндиктердин Хьюиттик чыныгы компактификациясы бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдырууларга жайылтылган. Бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулардын өсүштөрүнүн бир калыптуу чагылдырууларынын критерийи табылган. Бир калыптуу үзгүлтүксуз чагылдыруулардын чектүү тартиптеги компактификациялары жана өсүндүлөрү тургузулган.

Пайдалануу даражасы же колдонуу боюнча сунуштар. Алынган натыйжалар бир калыптуу мейкиндиктер жана бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулардын компакттуулугунун жана толуктугунун башка түрлөрүн мүнөздөө үчүн жана бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулардын абсолютун тургузуу үчүн колдонулушу мүмкүн.

Колдонуу аймагы. Бир калыптуу мейкиндиктер теориясы жана бир калыптуу үзгүлтүксүз чагылдыруулар, топологиялык жана бир калыптуулук группалардын теориясы, топологиялык оюндар теориясы.

РЕЗЮМЕ

диссертации Байджурановой Анары Мелебековны на тему: «О некоторых свойствах компактности и полноты равномерных пространств и их отображений» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология

Ключевые слова. Пред-Линделёфово пространство, равномерно Менгера пространство, с-полное пространство, Хьюиттовская вещественная компактификация равномерных пространств, игры на равномерных пространствах, компактификация равномерно непрерывных отображений, нарост равномерно непрерывных отображений.

Объект исследования. Теоретико-множественная топология.

Предмет исследования. Равномерные пространства, равномерно непрерывные отображения, топологические игры.

Цель работы. Установить характеристики важнейших свойств типа компактности и полноты равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений.

Методы исследования и аппаратура. Использованы метод покрытий, метод фильтров Коши и метод взаимной классификации пространств и отображений.

Полученные результаты и их новизна. Получены различные характеристики предкомпактных, пред-Линделёфовых, счетно предкомпактных и равномерно Менгера пространств. Установлены характеристики Хьюиттовской вещественной компактификации равномерных пространств. Доказана секвенциальная полнота счетно паракомпактных пространств. Найдены критерии выигрышных стратегий игроков на равномерных пространствах. Перенесена Хюиттовская вещественная компактификация равномерных пространств на равномерно непрерывные отображения. Найден критерий равномерной совершенности наростов равномерно непрерывных отображений. Построены компактификации и наросты конечного порядка равномерно непрерывных отображений.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты могут применяться для характеризации других типов компактности и полноты равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений и построения абсолюта равномерно непрерывных отображений.

Область применения. Теория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, теория топологических и равномерных групп и теория топологических игр.

SUMMARY

on the dissertation "On some properties of compactness and completeness of uniform space and its mappings" by Baidzhuranova Anara Melebekovna submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences on specialty 01.01.04 - geometry and topology

Key words. Pre-Lindelöf space, uniformly Menger space, c-complete space, Hewitt real compactification of uniform spaces, games on uniform spaces, compactification of uniformly continuous mappings, growth of uniformly continuous mappings.

Object of research. Set theoretical topology.

Subject of research. Uniform spaces, uniformly continuous mappings, topological games.

Aim of research. To establish the characterizations of the most important properties such as compactness and completeness of uniform spaces and uniformly continuous mappings.

Methods of research. Coverings method, Cauchy filters method and mutual classification of spaces and mappings method are used.

The scientific results and novelty. Various characteristics of pre-compact, pre-Lindelöf, countably pre-compact, and uniformly Menger spaces are obtained. The characteristics of the Hewitt real compactification of uniform spaces are established. Sequential completeness of countably paracompact spaces is proved. Criteria for winning strategies of players on uniform spaces are found. The Hewitt real compactification of uniform spaces is carried over to uniformly continuous mappings. A criterion for uniform perfectness of growths of uniformly continuous mappings is found. Compactifications and growths of finite order of uniformly continuous mappings are constructed.

Recommendations on using. The results obtained can be used to characterize other types of compactness and completeness of uniform spaces and uniformly continuous mappings and to construct the absolute of uniformly continuous mappings.

Field of applications. The theory of uniform spaces and uniformly continuous mappings, the theory of topological and uniform groups, and the theory of topological games.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ, ЕДИНИЦ, ТЕРМИНОВ, СОКРАЩЕНИЙ

“$\in$” – знак теоретико-множественной принадлежности.
“$\subset$” – знак теоретико-множественного включения.
“$\cap$” – знак теоретико-множественного пересечения.
“$\cup$” – знак теоретико-множественного объединения.
“$\varnothing$” – знак пустого множества.
N – множество всех натуральных чисел.
Q – множество всех рациональных чисел.
R – множество всех действительных чисел.
$\{A\}$ – семейство, состоящее из множества A.
Символы $f : X \to Y$, $y = f(x)$ означают отображения множества X в множество Y.
$f|_M$ – сужение отображения f на M.
(X,U) – равномерное пространство.
U_X – универсальная равномерность.
U_l – пред-Линделёфова равномерность.
τ_U – топология, индуцированная равномерности U.
$[A]$ – замыкание множества A.
$\circ$ – композиция.
$\times$ – декартово произведение.
UG_i, $i = 1,2,3$ - игры на равномерных пространствах.
$\prod$ – произведение.
$(\tilde{X},\tilde{U})$ – пополнение.
$(\tilde{X} \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}\setminus X})$ – нарост.
(vX, vU) – Хьюиттовская вещественная компактификация равномерного пространства (X,U).
$C(X)$ – кольцо всех непрерывных вещественных функций на X.
Δ – идеал.
U_f – база отображения.
$\hat{v}f$ – Хьюиттовская вещественная компактификация отображения f.
$\hat{f}$ – компактификация равномерно непрерывного отображения f.
$\hat{f}|_{\hat{X}\setminus X}$ – нарост равномерно непрерывного отображения f.
$\{y\}$ – одноточечное множество
$\alpha(M)$ – звезда множества M относительно семейства α.