

**ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Б.Н. ЕЛЬЦИНА**

Диссертационный совет Д.05.16.532

На правах рукописи
УДК: 519.56 (575.2) (043.3)

НАДЖМИДДИНОВ АСАДУЛЛО МИРЗОЕВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ
НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЯВЛЕНИЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА
ТЕПЛА В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ**

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2017

Работа выполнена на кафедре вычислительных машин, систем и сетей Таджикского национального университета.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент **Джураев Хайрулло Шарофович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Сатыбаев Абдуганы Джунусович**
(ОшГУ)

кандидат физико-математических наук,
Дуйшоков Кайратбек Дуйшокович
(КГТУ им. И. Раззакова)

Ведущая организация: **Таджикский технический университет
им. академика М.С.Осими**
Республика Таджикистан, 734042,
г. Душанбе, ул. акад. Раджабовых 10

Защита состоится «22» сентября 2017 года в 14:00 часов на заседании Диссертационного совета **Д.05.16.532** при Институте автоматизации и информационных технологий Национальной академии наук Кыргызской Республики по адресу 720071, г. Бишкек, пр. Чуй, 265, ауд. 118.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Национальной академии наук Кыргызской Республики по адресу: 720071, г. Бишкек, пр. Чуй, 265 «а» и на сайте ИАИТ НАН КР по адресу: www.iait.kg, E mail: gulsaat@mail.ru.

Автореферат разослан « 18 » августа 2017 г.

Ученый секретарь

Диссертационного совета к.ф-м.н.



Керимкулова Г.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Элементы энергетического, электронного, космического и другого оборудования в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой в ряде физических процессов, когда распространение температуры приводят к горению или взрыву, требует значительных усилий. Эти явления имеют место в формировании теплового пограничного слоя в условиях стационарного обтекания поверхностей, при нагреве, при химических реакциях и так далее. С другой стороны, в большинстве энергетических установок (двигатели внутреннего сгорания, реактивные двигатели, различные камеры сжигания) технологические процессы основаны на горении твердого или газообразного топлива, сопряженном со сложными гидродинамическими или газодинамическими течениями. Как правило, это сложные и многоэтапные физико-химические процессы. При этом важно знать физические механизмы, лежащие в его основе и обеспечивающие существование горения и взрыва, его устойчивость, неустойчивость и другие характеристики, которые непосредственно отражаются на эффективности, долговечности, надежности, физической и экологической безопасности использования энергетических установок. Поэтому, исследование в них линейных и нелинейных процессов, в том числе скоростей превращения веществ, участвующих в этих процессах, и резкое различие скоростей тепловых и концентрационных изменений, является актуальной задачей для развития новых современных технологий.

Для математического и численного моделирования очень важной является проблема проверки правильности построения компьютерных моделей, которая может быть решена введением некоторых параметров (регуляризации, релаксации теплового потока) как пробных математических параметров. Такая постановка делает эту работу принципиально отличительной от других работ в данной области.

Однако, несмотря на значительную проработку подходов моделирования и исследования стационарного линейного и нелинейного распространения температуры, в том числе и приближенной к теме среде при зависимости теплового потока от температуры, такой подход требует введения новых математических методов, в том числе для проверки достоверности получаемых решений.

Целью диссертационной работы является математическое моделирование стационарных тепловых процессов в конденсированных телах с учетом регуляризации теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик, нелинейной двумерной постановке, с последующим аналитическим и численным исследованием решений в окрестности критических точек, т. е. в условиях горения и взрыва этих веществ.

Для достижения этой цели были поставлены следующие **задачи**:

- 1) создание математической модели стационарных тепловых процессов в телах с учетом регуляризации теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик, на основе нелинейной стационарной теории теплопереноса, а также создание математического аппарата в виде аналитических и разностных схем и компьютерных программ;

2) усовершенствование приближенных аналитических методов решения краевых задач для стационарной нелинейной системы уравнений тепловых процессов, а также аналитический и численный анализ закономерностей стационарного распространения тепловых процессов;

3) проведение аналитических исследований для определения критических условий, т.е. критических точек, состояния равновесия, расположенного в фазовой плоскости;

4) разработка численного метода и эффективных компьютерных программ для определения распределения температуры и теплового потока на поверхности тела.

5) совершенствование математических приемов решения уравнения горения, развитие метода асимптотических приближений. Применение изложенных методов для более общих нелинейных динамических систем.

б) математическое моделирование процессов горения и взрыва в конкретных конденсированных телах с учетом теплообмена в окружающей среде. Демонстрация вышеуказанного подхода на примере практических модельных задач: распределение тепла в плоской пластинке, тепловой взрыв в цилиндрическом теле, тепловой взрыв в сферическом теле.

Научная новизна исследования. Проведено аналитическое и численное решение нелинейного стационарного уравнения теплопереноса в конденсированных средах с учетом регуляризации теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик в структурно неоднородных химически активных веществах, в критических условиях процессов горения и взрыва. В рамках этого направления были впервые получены следующие научные результаты.

1. Разработана обобщённая математическая модель для описания стационарных тепловых процессов в конденсированных средах с учетом регуляризации теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик. Установлена закономерность стационарного распространения температуры в среде. Сформулированы условия состояния равновесия теплового потока и температуры в фазовой плоскости, при которых тепловой поток и температура перемещают и разлагают область в устойчивую и неустойчивую.

2. Предложен математический аппарат в виде аналитического выражения и разностных схем, отличающихся от известных ранее тем, что с их помощью можно решать существенно новые прикладные задачи на основе стационарного уравнения математической физики с переменным и постоянным коэффициентом.

3. Определены условия теплообмена и состояния равновесия в конденсированной среде, при которых тепловой поток и температуры в фазовой плоскости перемещаются и разлагаются в устойчивых и неустойчивых областях.

4. Разработаны методы расчета и компьютерные программы для определения распределения температуры и теплового потока в осесимметричных конденсированных телах в окрестности особой точки, т.е. в критических условиях процессов горения и взрыва.

5. С помощью численного исследования в окрестности особой точки усовершенствованы математические приемы решения уравнения горения, показаны, что тепловой взрыв и зажигание не разные процессы, а разные режимы одного и того же процесса.

6. Исследованы условия устойчивости решений стационарной теории теплового взрыва. Для демонстрации вышеуказанного подхода рассмотрены такие практические модельные задачи: распределение тепла в плоской пластинке, тепловой взрыв в цилиндрическом теле, тепловой взрыв в сферическом теле.

Теоретическая и практическая значимость работы: Разработан единый методологический подход к исследованию стационарных тепловых процессов в конденсированных средах. Полученные в работе зависимости могут быть использованы для создания принципиально новых, более эффективных технологий в различных областях науки и техники.

Совокупность полученных в диссертационной работе аналитических выражений и разностных схем для стационарной системы уравнений теплообмена при горении конденсированных сред конечных размеров можно использовать в исследованиях различных прикладных задач горения или взрыва. Результаты, полученные в диссертации, являются новыми и носят теоретический и практический характер. Выводы и положения, сформулированные в диссертации, базируются на строгих физико-математических утверждениях. Приближённые аналитические результаты диссертации могут быть использованы при разработке компьютерных моделей стационарного теплового процесса и в других научно-прикладных задачах, а также в образовательном процессе при чтении специальных курсов, в написании курсовых, дипломных и магистерских работах.

Представленная работа является обобщением теоретических исследований, выполненных автором на кафедре «Вычислительные машины, системы и сети» Таджикского национального университета. Исследования проводились согласно планам госбюджетных тематик ТНУ, зарегистрированных под «Аналитическое исследование и численное решение некоторых задач математической физики и информационной технологии» (01.01.2006-31.12.2010) и «Исследование физических основ информационных процессов и метод регуляризации некоторых задач математической физики» (01.01.2011-31.12.2015).

Методология и методы исследования:

Основные результаты диссертации получены с применением методов теплофизики и теплотехники, теоретической физики, теории дифференциальных уравнений и математической физики, теории обратных и некорректных задач. В диссертации использованы следующие методы: аналитический, дискретизации, численные, регуляризации и другие.

Положения, выносимые на защиту:

1. Создана математическая модель стационарных тепловых процессов в конденсированных средах с учетом регуляризации теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик.

2. Установлены закономерности стационарного распространения температуры в среде. Сформулированы условия устойчивости и неустойчивости длины тела, при которых очаг теплового потока перемещается с температуры.

3. Определены условия состояния равновесия теплового потока и температуры в фазовой плоскости, при которых тепловой поток и температура перемещаются и разлагают область на устойчивую и неустойчивую.

4. Предлагаемый математический аппарат в виде аналитического выражения и разностных схем, отличающихся от известных ранее тем, что с их помощью можно решать существенно новые стационарные уравнения математической физики с переменным и постоянным коэффициентами.

5. Программы реализации разностных схем для численного решения уравнений горения в лагранжевых координатах.

6. Математические модели процессов горения и взрыва в конденсированных телах в виде решения задач: тепловой взрыв в цилиндрическом теле; тепловой взрыв в сферическом теле, распространение тепла в плоской стене с учетом теплообмена в окружающей среде.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов подтверждается использованием математических моделей, адекватных реальным физическим процессам, обоснованных методов построения семейств устойчивых задач, установлением зависимости распределения температуры от критического условия.

Основные результаты работы были доложены и обсуждены на Международных конференциях: посвященной 60-летию ТНУ (Душанбе, 2008); «Современные вопросы молекулярной спектроскопии конденсированных сред» (Душанбе, 2011); «Математической физики и ее приложения» (РФ, Самара, 2014); научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава ТНУ (с 2008-2016 гг.); Республиканских конференциях: посвященной 70-летию профессора Б.Алиева «Современные проблемы прикладной математики и информатики» (Душанбе, 2014); научно-практической конференции «Перспективы развития науки и образования в XXI» (Душанбе, 2010-2011); конференции по ядерно-физическим методам анализа состава биологических, геологических, химических и медицинских объектов (Душанбе, 2014); «Современные проблемы физики конденсированного состояния» (Душанбе, 2015).

Личный вклад автора в работы, выполненные в соавторстве, заключается в непосредственном участии на всех этапах исследования: развитие физических представлений о рассматриваемых процессах, математическое описание задач, разработка аналитических и численных методов их решения и анализ результатов.

Публикации. Основное содержание диссертации и научные результаты, полученные в диссертационной работе, опубликованы в 14-и печатных работах, в том числе в журналах из перечня ВАК Кыргызской Республики и ВАК Российской Федерации.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, выводов и списка цитируемой литературы. Работа изложена на 105 страницах основного машинописного текста, включает 5 таблиц и 18 рисунков. Список использованной литературы содержит 117 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, приводятся цели и общая характеристика работы (новизна, достоверность, практическая значимость, апробации), сформулированы основные положения, выносимые на защиту, дана краткая аннотация содержания по главам.

В первой главе приведен обзор методов исследования, механизмов распределения среды, разложения топлива на химически реагирующие

компоненты, детальной структуры горения, нахождения условия устойчивости горения, возможности возникновения взрывного вида горения, которые построены из дискретных элементов, локально взаимодействующих друг с другом и, таким образом, являющиеся приближением естественных пространственно-протяженных систем. Разработаны математические модели, которые используются для описания процессов образования и развития структур в таких системах.

Рассматриваются проблемы, возникающие при исследовании базовых математических моделей, нелинейной стационарной теплопроводности и теплового потока. Детально анализируются свойства отдельных элементов, составляющих систему и законы взаимодействия между ними. Кратко обсуждаются различные математические методы, применяемые при решении линейных и нелинейных стационарных процессов горения или взрыва.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию зависимости стационарного распределения теплового потока от температуры в конденсированных средах методом регуляризации. Объектом исследования являются процессы линейных и нелинейных стационарных явлений переноса тепла (горения или взрыва).

В параграфе 2.1 предлагается исследование зависимости стационарного распределения теплового потока от температуры в конденсированных средах. В материальных средах распространение тепла всегда связано с тепловым движением структурных единиц. Если процесс теплопереноса является сложным, тогда для её исследования используются методы, обобщающие результаты различных простых методов. Одним из таких методов является метод развития фазовой плоскости. На основе этого метода исследуется стационарное распределение теплового потока в зависимости от температуры в конденсированных средах. Численно определена точка равновесия фазовой траектории.

Рассмотрение задачи горения конденсированной среды с учетом теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик приводит нас к выявлению и изучению среды с устойчивым и неустойчивым состояниями. В этом случае показано, что можно ввести в рамках методов математической физики эволюционную задачу, описываемую стационарной системой дифференциальных уравнений с частными производными для двух переменных q, T , зависящих от одной пространственной переменной x :

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} = -\frac{q}{\lambda} - \eta_1 T, \\ \frac{dq}{dx} = \varphi(T) - \eta_2 q, \end{cases} \quad (1)$$

где $T = T(x)$ – температура в точке $x, (K)$, $q = q(x)$ – плотность теплового потока в точке x ($\text{Вт}/\text{м}^2$); λ – коэффициент теплопроводности ($\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$); x –

координата вдоль оси Ox , а $\eta_1 = \frac{\mu-1}{x+\varepsilon - (\mu-1)(x+\varepsilon)^\mu}$, $\left(\frac{1}{m}\right)$, и $\eta_2 = \frac{1-\mu(\mu-1)(x+\varepsilon)^{\mu-1}}{x+\varepsilon - (\mu-1)(x+\varepsilon)^\mu}$, $\left(\frac{1}{m}\right)$,

число компонент, характеризующие коэффициенты уравнения теплопроводности в конденсированных средах. При $\eta_1 + \eta_2 = 0$, то есть когда

$\mu = 0$, среда имеет форму плоского сосуда, а когда $\eta_1 + \eta_2 = \frac{1}{x+\varepsilon}$, то есть $\mu = 1$

сосуд имеет цилиндрическую форму, а при $\eta_1 + \eta_2 = \frac{2}{x+\varepsilon}$, то есть $\mu = 2$ сосуд

принимает сферическую форму, а ε малый параметр ($0 \leq \varepsilon < 1$). Функция $\varphi(T)$ – источников тепла, описывает нелинейный теплообмен между телом и окружающей средой.

Будем рассматривать состояние равновесия и устойчивость системы. Приравнявая левые части уравнения (1) нулю, получим:

$$\begin{cases} -\frac{q}{\lambda} - \eta_1 T = 0, \\ \varphi(T) - \eta_2 q = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решение системы уравнений (2) позволяет определить особую точку в фазовой плоскости (T, q) . В зависимости от значения функции $\varphi(T)$, можно иметь бесконечное число равновесных состояний, то есть уравнение (2) может иметь бесконечное множество решений, которые могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Таким образом, состояние равновесия является особой точкой, в которой плотность теплового потока сливается с потоком энергии, то есть $T(x_*) = q(x_*)$.

В параграфе 2.2 проведено исследование процесса распространения тепла в среде плоской геометрической формы. В качестве плоскости, в которой происходит распространение тепла, используем фазовую плоскость (q, T) . В этом случае уравнения (1) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} = -\frac{q}{\lambda} + \frac{T}{x + \varepsilon + 1}, \\ \frac{dq}{dx} = \varphi(T) - \frac{q}{x + \varepsilon + 1}, \end{cases} \quad (3)$$

где $\eta_1 = -\frac{1}{x + \varepsilon + 1}$ и $\eta_2 = \frac{1}{x + \varepsilon + 1}$ – общее число компонентов, а ε малый параметр ($0 \leq \varepsilon \ll 1$).

Как показано в параграфе 2.1, в окрестности точки равновесия, то есть особой точки $(q(x_*), T(x_*))$ происходит фазовое превращение, либо в среде происходит взрыв, либо горение прекращается. В частности, в окрестности этой точки возникает необходимость в управлении процессом горения.

Рассмотрим процесс распространения тепла в положительной половине плоскости переменных (q, T) , так как параметры поверхности одинаковы. Поэтому граничные условия для температуры и плотности теплового потока можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} &= 0 \quad \text{и} \quad q|_{x=0} = 0; \\ -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=h} &= \alpha(T_1 - T_2) \quad \text{и} \quad q|_{x=h} = \alpha(T_1 - T_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где T_1 и T_2 соответственно, температура в начале и конце образца, а α – коэффициент теплоотдачи $\left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \right)$; h – длина образца (м).

Из этих граничных условий следует, что в точке $x=0$ температура среды отлична от нуля и постоянна, поэтому $\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$ и тепловой поток отсутствует. В точке $x=h$ изменение температуры в зависимости от изменения координаты x пропорционально разности температур в точках

$x=0$ и $x=h$, и, следовательно, плотность теплового потока q также пропорциональна разности температур на границах среды.

Из физического смысла поставленной задачи следует, что характер решения и условие его существования зависят лишь от параметров x , ε . Естественно ожидать, что при малых x и $\varepsilon \equiv 0$, когда велик тепловой поток в плоской среде, решение системы уравнений (3) существует, а при больших x и $\varepsilon \equiv 0$, эти уравнения не имеют решения. Таким образом, существуют критические значения $x_{кр}$ и $\varepsilon_{кр}$, разделяющие области существования и не существования решений системы уравнения (3). Конкретные значения $x_{кр}$ и $\varepsilon_{кр}$ можно найти в результате полного решения системы уравнения (3) при выполнении условий (4).

Рассмотрение среды горения как среды с двумя устойчивыми состояниями приводит нас к функции источников и стоков в виде кубического полинома, то есть $\varphi(T) = \alpha_1 T - \alpha_2 T^3$ $\left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}^3} \right)$, где источник тепла считаем линейным, а сток – нелинейным: α_1 – константа, характеризующая интенсивность источника, а α_2 – нелинейного стока тепла, соответственно. В этом случае показано, что

$$\frac{dq}{dT} = \frac{\lambda(x+\varepsilon+1)(\alpha_1 T - \alpha_2 T^3) - \lambda q}{\lambda T - (x+\varepsilon+1)q}. \quad (5)$$

Для определения функции теплового потока положим, что $\frac{dq}{dT} = k$, где k – произвольное число. Тогда из равенства (5) определим плотность теплового потока

$$q = \frac{\lambda(x+\varepsilon+1)(\alpha_1 T - \alpha_2 T^3) - \lambda k T}{\lambda - k(x+\varepsilon+1)}. \quad (6)$$

Подставляя это значения q в второе уравнение системы (3), найдем температуру:

$$T = \pm \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\lambda^2 k}{\alpha_2(x+\varepsilon+1)[\lambda(2\lambda-1) + k(1-\lambda)(x+\varepsilon+1)]}}. \quad (7)$$

Таким образом, подставляя значение T из (7) в (6) определим окончательное выражение для плотности потока тепла:

$$q(x, \varepsilon) = \pm \frac{\lambda^3 k}{(\lambda - k(x+\varepsilon+1))[\lambda(2\lambda-1) + k(1-\lambda)(x+\varepsilon+1)]} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{k\lambda^2}{\alpha_2(x+\varepsilon+1)[\lambda(2\lambda-1) + k(1-\lambda)(x+\varepsilon+1)]}}. \quad (8)$$

Теперь из выражений (7) и (8) определим значения α_1 и α_2 . С источниками и стоками константы α_1 и α_2 связаны со скоростями прямого и обратного переходов между состояниями. Поэтому, значения α_1 и α_2 определяются из условия касания кривых (7) и (8). Отсюда следует, что $T(x^*) = q(x^*)$. Следовательно, эта точка разделяет область распространения температуры и плотности теплового потока на две области: $T < T^*$, $q < q^*$ и $T > T^*$, $q > q^*$. В точке (x^*, T^*) , то есть в точке пересечения кривых должны выполняться следующие условия:

$$T^* = q^*, \quad \frac{dT^*}{dx} = \frac{dq^*}{dx}. \quad (9)$$

Эти условия позволяют определить значения α_1 и α_2 в точке пересечения кривых.

Из первого равенства (9) следует:

$$\alpha_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\lambda^2} - \sqrt{k(3\lambda+1+k(x+\varepsilon+1)) - \frac{\lambda}{x+\varepsilon+1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{k(3\lambda+1+k(x+\varepsilon+1)) - \frac{\lambda}{x+\varepsilon+1}} \right). \quad (10)$$

Подставляя найденное значение α_1 в виде выражения (10) в выражения (7) и (8) и применяя второе условие (9) определим значение α_2 :

$$\alpha_2 = \frac{1}{2T^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\lambda^2} - \sqrt{k(3\lambda+1+k(x+\varepsilon+1)) - \frac{\lambda}{x+\varepsilon+1}} \right) \left(\sqrt{k(3\lambda+1+k(x+\varepsilon+1)) - \frac{\lambda}{x+\varepsilon+1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad (11)$$

Далее, подставляя найденное значение α_1 из выражения (10), а α_2 из (11) в выражение (7), определим температуру T и в выражение (8) - определим тепловой поток q .

Для наглядной интерпретации полученных результатов, используя выражения (10) и (11) проведем численный расчёт зависимости коэффициента пропорциональности от изменения точки координаты оси Ox и малый параметра. При проведении численных расчётов принимаем значение $\lambda = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$.

Результаты численных расчетов приведены в табл.1.

Таблица 1 – Результаты численных расчетов

x	0.0030	0.0120	0.0180	0.0240	0.0300
α_1	236.88	256.030	267.399	277.874	287.589
α_2	0.0011	0.0012	0.0013	0.0014	0.0015

Для наглядной интерпретации полученных результатов, используя выражения (7) и (8), проведем численный расчёт зависимости плотности теплового потока от изменения температуры. При проведении численных расчётов функцию $\varphi(T)$ принимаем в следующем виде: $\varphi(T) = \alpha_1 T - \alpha_2 T^3$, где α_1, α_2 – коэффициенты пропорциональности, значения которых $\alpha_1 = 287.589 \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$; $\alpha_2 = 0,0015 \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^3)$, а значения λ были взяты $\lambda = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; $x = 0,03 \text{ м}$.

Результаты численного расчета при значениях числа $k = \frac{\lambda}{\varepsilon+1}$, представлены на рис.1.

Как видно из рис. 1 в сферической среде с ростом размеров тела плотность теплового потока q_1 возрастает почти линейно, с увеличением координаты тела (x), её температура T_1 уменьшается приблизительно нелинейно, а q_2 и T_2 – наоборот. Чем больше параметр ε , тем круче температурное распределение. Точка $x=0.23$ является точкой критического состояния горения. В точке $x=0.54$ выполняется условие (9) и она является точкой горения среды.

В параграфе 2.3 в рамках задач рассматривается стационарное распространение тепла в среде цилиндрической формы:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} = -\frac{q}{\lambda}, \\ \frac{dq}{dx} = \varphi(T) - \frac{q}{x + \varepsilon + 1}, \end{cases} \quad (12)$$

где $\eta_1 = 0$ и $\eta_2 = \frac{1}{x + \varepsilon + 1}$ – общее число компонентов, а ε малый параметр ($0 \leq \varepsilon \ll 1$).

Теперь предположим, что функция $\varphi(T)$ в системе (12) имеет следующий вид:

$$\varphi(T) = \alpha_2 T \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - T^2 \right). \quad (13)$$

Согласно, выражению (5), плотность теплового потока имеет вид:

$$q = \frac{\lambda(x + \varepsilon + 1) \alpha_2 T \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - T^2 \right)}{\lambda - k(x + \varepsilon + 1)}. \quad (14)$$

Подставляя это значение q в первое уравнение системы (12), найдем температуру:

$$T = \pm \frac{\sqrt{A \alpha_1} \exp(-f_2(x, \alpha_1, \alpha_2 k, \varepsilon))}{\sqrt{\alpha_2} \sqrt{f_1^2(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, k, \varepsilon) - A \exp(-2f_2(x, \alpha_1, \alpha_2, k, \varepsilon))}}, \quad (15)$$

где $f_1(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, k, \varepsilon) = [\lambda - k(x + \varepsilon + 1)] \frac{2\alpha_2^2 \lambda}{\alpha_1 k^2}$, $f_2(x, \alpha_1, \alpha_2, k, \varepsilon) = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 k} (x + \varepsilon + 1)$.

Таким образом, подставляем значение T из (15) в (14) определим окончательное выражение для плотности потока тепла:

$$q(x, \varepsilon) = \pm \frac{\alpha_1 \sqrt{A \alpha_1} \lambda (x + \varepsilon + 1) \exp(-f_2(x, \alpha_1, \alpha_2, k, \varepsilon))}{\sqrt{\alpha_2} (\lambda - k(x + \varepsilon + 1)) \sqrt{f_1^2(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2) - A \exp(-2f_2(x, \alpha_1, \alpha_2, k, \varepsilon))}} * \frac{f_1^2(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, k, \varepsilon) - 2A \exp(-2f_2(x, \alpha_1, \alpha_2, k, \varepsilon))}{f_1^2(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, k, \varepsilon) - A \exp(-2f_2(x, \alpha_1, \alpha_2, k, \varepsilon))}. \quad (16)$$

В выражениях (15) и (16) A и k неизвестные постоянные интегрирования, которые подлежат определению. Постоянные интегрирования A и k определяются из граничных условий (4):

$$A = \frac{1}{2} f_1^2(0, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, k, \varepsilon) \exp(-2f_2(0, \alpha_1, \alpha_2, k, \varepsilon)), \quad k = \frac{\lambda}{\varepsilon + 1}.$$

С учетом этого значения k постоянная интегрирования A , принимает вид:

$$A = (\varepsilon + 1) (\alpha_1 T_0 - \alpha_2 T_0^3).$$

Теперь, подставляя найденные значения A и k в выражения (15) и (16), определим решение системы уравнений (12).

Следовательно,

$$\alpha_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\lambda^2} - \sqrt{k(3\lambda + 1 + k(x + \varepsilon + 1)) - \frac{\lambda}{x + \varepsilon + 1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{k(3\lambda + 1 + k(x + \varepsilon + 1)) - \frac{\lambda}{x + \varepsilon + 1}} \right),$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2T^{*2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\lambda^2} - \sqrt{k(3\lambda + 1 + k(x + \varepsilon + 1)) - \frac{\lambda}{x + \varepsilon + 1}} \right) \left(\sqrt{k(3\lambda + 1 + k(x + \varepsilon + 1)) - \frac{\lambda}{x + \varepsilon + 1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Для наглядной интерпретации полученных результатов, используя выражения (15) и (16), проведем численный расчёт зависимости коэффициентов пропорциональности от изменения точки на координатой оси Ox и знания малого параметра. При проведение численных расчётов

принимаем значения $\lambda = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $T^* = 501.5 \text{ К}$. Результаты численных расчетов приведены в табл.2.

Таблица 2 – Результаты численных расчетов

№ п/п.	x	α_1	α_2	x	α_1	α_2
0	0.0000	236.8854	0.0011	0.0300	238.9327	0.0012
1	0.0003	236.9060	0.0011	0.1800	248.7071	0.0012
2	0.0018	237.0091	0.0011	0.3000	256.0303	0.0012
3	0.0030	237.0916	0.0011	0.3300	257.7991	0.0013

Далее подставляя найденное значение α_1 и α_2 в выражение (15) и (16) соответственно, определим температуру T и значение теплового потока в точке с прикосания кривых $T(x^*)$ и $q(x^*)$.

На рис.2 представлены результаты численного расчета теплового потока q и температуры T от размера (длины) цилиндрической среды (x) при $\varphi(T) = \alpha_2 T \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - T^2 \right)$.

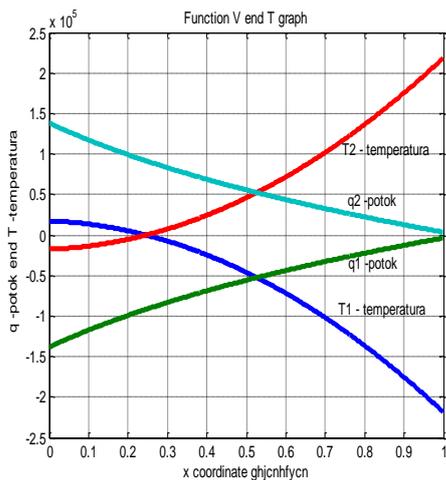


Рис. 1. а) Зависимость изменения значения теплового потока q от изменения линейных размеров (x) образца; б) Зависимость изменения значения температуры T от изменения линейных размеров (x) образца.

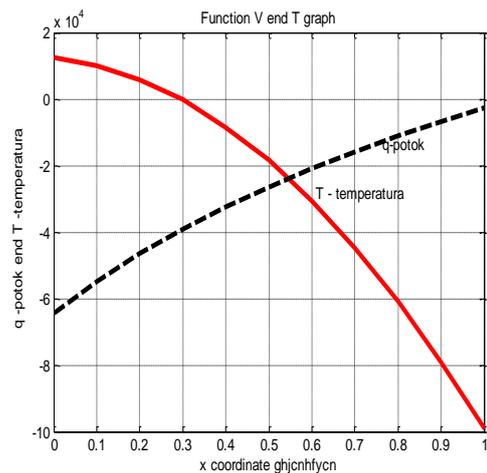


Рис. 2. а) Зависимость изменения теплового потока от размерности цилиндрической среды (x) в виде штрихованной линии; б) Зависимость изменения температуры от размерности цилиндрической среды (x) в виде сплошной линии.

Как видно из рис. 2 а) в цилиндрической среде с ростом размеров тела, плотность теплового потока возрастает почти линейно. Из рис. 2 б) следует, что с увеличением координаты тела (x), её температура уменьшается приблизительно нелинейно. Чем больше параметр ε , тем круче температурное распределение. В точке $x=0,55$ выполняется условие $T^*(0.55) = q^*(0.55)$.

В параграфе 2.4 стационарное распространение тепла в среде сферической формы, то изменение их сферических фазовых переменных q , T осуществляется с помощью следующей система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} = -\frac{q}{\lambda} - \frac{T}{(x+\varepsilon)(1-x-\varepsilon)}, \\ \frac{dq}{dx} = \varphi(T) - \frac{1-2(x+\varepsilon)}{(x+\varepsilon)(1-x-\varepsilon)}q. \end{cases} \quad (17)$$

Причем, теплообмен между элементами системы и окружающей сферической средой задан в виде функции $\varphi(T) = \alpha_2 T \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - T^2 \right)$.

На рис.3 представлены результаты численного расчета температуры T от размера (диаметра) сферической среды (x) при $\varphi(T) = \alpha_2 T \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - T^2 \right)$. Теплофизические свойства параметров имеют вид: $\alpha_1 = 309.0985 \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$; $\alpha_2 = 0.001935 \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^3)$; $\lambda = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$; $\varepsilon = 0.5 \text{ м}$; $x_{\min} = 0$; $x_{\max} = 1 \text{ м}$. $T_0 = 300 \text{ К}$.

Как видно из рис. 3 в сферической среде с ростом параметра ε , критическая точка температуры движется почти линейно в начальной координате оси x , по убыванию параметра ε - на оборот. Чем больше параметр ε , тем круче температурное распределение. Точка $x = 0.5$ является точкой критического состояния.

На рис. 4 представлены результаты численного расчета теплового потока q и температуры T соответственно, от размера (диаметра) сферической среды (x) при $\varphi(T) = \alpha_2 T \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - T^2 \right)$.

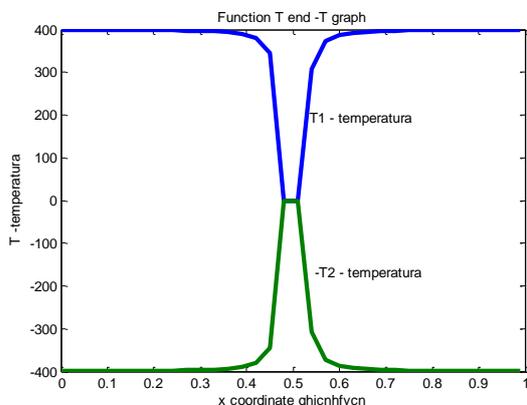


Рис. 3. Зависимость изменения температуры от размерности сферической среды (x).

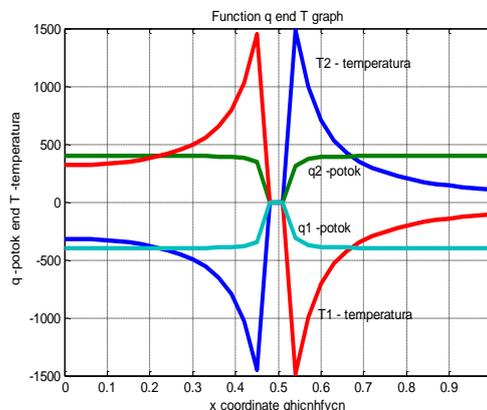


Рис. 4. Зависимость изменения теплового потока и температуры от размерности сферической среды (x);

Как видно из рис. 4 в сферической среде с ростом размеров тела плотность теплового потока возрастает почти линейно, с увеличением координаты тела (x), её температура уменьшается приблизительно нелинейно. Чем больше параметр ε , тем круче температурное распределение. Точке $x = 0.23$ соответствует точка критического состояния горения. В точке $x = 0.5$ выполняется условие равновесия, и она является точкой горения среды. А точка $x = 0.68$ является точкой погашения горения.

На рис.5 представлены результаты численных расчетов зависимостей теплового потока q от температуры T на основе решения системы (17).

В третьей главе представлены результаты численных методов решения разностной схемы для полученной во второй главе системы уравнений стационарного распределения теплового потока от температуры в конденсированных средах.

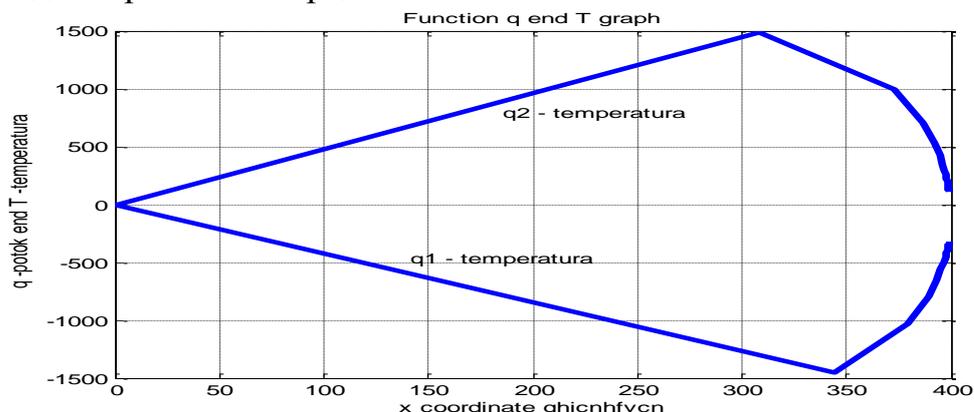


Рис. 5. Зависимость теплового потока от изменения температуры.

В параграфе 3.1 проведено исследование зависимости стационарного распределения теплового потока от температуры в конденсированных средах. Для повышения точности расчетов обычно используются преобразования координат, сгущающие узлы разностной сетки в области больших градиентов. При решении сложных задач такая информация зачастую отсутствует, поэтому желательно использовать такие преобразования координат, которые автоматически подстраивают узлы разностной сетки к решению.

Задача приближенного численного интегрирования системы уравнения (1) по численным методам состоит в нахождении приближенного значения функции температуры $T(x)$ и теплового потока $q(x)$ в каждой точке абсциссы (узле сетки): $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \dots, x_n = L$. 67%

Обозначим через $T_k = T(x_k)$ истинное значение температуры, а через $q_k = q(x_k)$ истинное значение теплового потока в точке абсциссы $x_k = kh$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

Заменим производные $\frac{dT}{dx}, \frac{dq}{dx}$ в точке $x_k = kh$ через разностные отношения по формулам:

$$\frac{dT(x_k)}{dx_k} = \frac{T_{k+1} - T_{k-1}}{2h} - \varepsilon_1, \quad \frac{dq(x_k)}{dx_k} = \frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{2h} - \varepsilon_2,$$

где ε_1 и ε_2 – остаточные члены, стремящиеся к нулю при стремлении к нулю h . Тогда в точке абсциссы $x_k = kh$ система уравнений (1) заменяется следующим соотношением:

$$\begin{cases} T_{k+1} = T_{k-1} + 2h(\varepsilon_1 - \eta_{1k}T_k) - \frac{2h}{\lambda}q_k, \\ q_{k+1} = q_{k-1} + 2h(\varepsilon_2 - \eta_{2k}q_k) + 2h\varphi(T_k), \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (18)$$

где $\eta_{1k} = \frac{\mu-1}{x_k + \varepsilon - (\mu-1)(x_k + \varepsilon)^\mu}$ и $\eta_{2k} = \frac{1 - \mu(\mu-1)(x_k + \varepsilon)^{\mu-1}}{x_k + \varepsilon - (\mu-1)(x_k + \varepsilon)^\mu}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$)

величины характеризующие коэффициенты зависимости теплового потока от температуры в точках абсциссы в конденсированных средах.

Формула (18) позволяет вычислить значения функции температуры $T(x)$ и теплового потока $q(x)$ в каждой точке абсциссы (узле сетки): $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \dots, x_n = L$, находящимся только по известным из начальных или краевых условий значениям функции температуры $T(x)$ и теплового потока $q(x)$ в узлах оси Ox при $x=0$ и $x=L$. Получив, значения функции температуры $T(x)$ и теплового потока $q(x)$ в первом, узле по формуле (18) находим значения в узлах второго, третьего и тому подобное. Этот процесс построения можно продолжать как угодно далеко, так как значения функции температуры $T(x)$ и теплового потока $q(x)$ в узлах прямых будут известны из начальных или граничных условий. Весовые множители $2h\eta_{1k}$ и $2h\eta_{2k}$, то есть малый параметр ε , выбираются из условия устойчивости разностной схемы. Разностная схема (18) аппроксимирует систему (1) с порядком $O(h^2)$.

Стабилизирующие системы

$$\begin{cases} T_k = \frac{\varepsilon_1}{\eta_{1k}} - \frac{1}{\lambda\eta_{1k}} q_k, \\ q_k = \frac{1}{\eta_{2k}} (\varepsilon_2 + \varphi(T_k)) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

назовем согласованными, если при $k = 0, 1, 2, \dots, n$ определим особые точки в фазовой плоскости (T_k, q_k) и несогласованными в противном случае. В этом случае на каждом шаге разностная схема (18) реализуется в следующем виде:

$$\frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{T_{k+1} - T_{k-1}} = \frac{\lambda(\varepsilon_2 + \varphi(T_k)) - \eta_{2k}q_k}{\lambda(\varepsilon_1 - \eta_{1k}T_k) - q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

При получении стационарного решения методом установления в качестве стабилизирующего оператора выбирается несогласованная стабилизирующая система (19). Тогда при $q_k \neq \lambda(\varepsilon_1 - \eta_{1k}T_k)$ стационарные точки T_k^* определяются из уравнения $\varepsilon_2 + \varphi(T_k) - \eta_{2k}q_k = 0$.

Теперь рассмотрим реализацию схемы (18) на сетке фазовой плоскости (q_k, T_k) . Если дискретная система описывается разностным уравнением (20), тогда точка, касательная к сетке фазовых траекторий определяется выражением

$$\frac{\lambda(\varepsilon_2 + \varphi(T_k) - \eta_{2k}q_k)}{\lambda(\varepsilon_1 - \eta_{1k}T_k) - q_k} = M_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (21)$$

где M_k — является коэффициентом теплопередачи в k -слое.

Из системы уравнение (21) можно получить значения сеточной функции

$$q_k = \frac{\lambda(M_k\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{M_k - \lambda\eta_{2k}} - \frac{\lambda(\varphi(T_k) + M_k\eta_{1k}T_k)}{M_k - \lambda\eta_{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \text{при } M_k \neq \lambda\eta_{2k}. \quad (22)$$

Найдем соотношение между шагами сетки для теплового потока, обеспечивающее одинаковую точность дискретизации его выражение (3) и (22). Тепловой поток в (3) и (22) имеют различные значения в координатной точке. Погрешности определяются максимальным значением этой ошибки. Возникает вопрос нахождения такого соотношения между вторым порядком точности теплового потока и температуры, при котором ошибки аппроксимации равны. Имея в виду тот факт, что ошибки дискретизации должны удовлетворять тепловому потоку и температуре, запишем: $M_k\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

или с учетом второго порядка точности

$$M_k \left(\frac{d^3 T(x)}{dx^3} \right)_k = \left(\frac{d^3 q(x)}{dx^3} \right)_k.$$

Теперь найдем критическое условие для дискретной функции температуры горения. Для этого подставляя дискретные функции теплового потока q_k в виде (22) в систему уравнения (18), в результате имеем:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= T_{k-1} + \frac{2h}{M_k - \lambda\eta_{2k}} [\varepsilon_2 - \lambda\eta_{2k}\varepsilon_1 + \lambda\eta_{1k}\eta_{2k}T_k + \varphi(T_k)], \\ q_{k+1} &= q_{k-1} + \frac{2hM_k}{M_k - \lambda\eta_{2k}} [\varepsilon_2 - \lambda\eta_{2k}\varepsilon_1 + \lambda\eta_{1k}\eta_{2k}T_k + \varphi(T_k)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Соотношения (23) образуют для всех внутренних узлов точек k -го слоя систему алгебраических уравнений $(n-1)$ -го порядка.

В параграфе 3.2. подробно рассматриваются задачи применения идеи теплового взрыва в теории переноса тепла в конденсированных средах. В этом наиболее важном направлении то, что невозможно было получить в виде аналитических приближенных выражений или увидеть экспериментально, позволило сделать компьютерное моделирование. Анализ результатов расчета в фазовой плоскости показал два существенных различных режима поведения системы. Вблизи предела теплового взрыва сначала вещество прогревается, и температуры в различных точках системы выравниваются. Затем возникает саморазогрев в центре системы, который прогрессивно возрастает и приводит к воспламенению. Первый режим-тепловой взрыв, второй-зажигания.

В 3.2.1. численное исследование в фазовой плоскости задачи теплового взрыва в цилиндрическом теле показало, что стационарное решение существует, если безразмерный параметр в приближенном уравнении теплопроводности (3.2.4) $\chi=2$, так что условие $\chi = \chi_*$ определяет критическое значение параметров, при достижении которых начинается рост температуры, сопровождающийся размягчением материала и стационарное течение конденсированных сред в цилиндре становится невозможным, на практике процесс переходит на явление колебательного режима течения.

Существование нескольких решений приводит к вопросу о том, какие из этих решений устойчивы и могут реализоваться как стационарные предельные решения. Для строгости, и особенно в связи со сферическим сосудом, для которого число решений бесконечно, возникает необходимость аналитического исследования устойчивости решений стационарной теории горения и теплового взрыва, что и было сделано в 3.2.2.

В параграфе 3.3 численным методом исследовано стационарное распространение тепла в плоской среде. В этом случае имеем разностные системы вида:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= T_{k-1} + \frac{2h(x_k + \varepsilon + 1)}{M_k(x_k + \varepsilon + 1) - \lambda} [(x_k + \varepsilon + 1)^2 \varepsilon_2 - \lambda(x_k + \varepsilon + 1)\varepsilon_1 - \lambda T_k + (x_k + \varepsilon + 1)^2 \varphi(T_k)], \\ q_{k+1} &= q_{k-1} + \frac{2h(x_k + \varepsilon + 1)M_k}{M_k(x_k + \varepsilon + 1) - \lambda} [(x_k + \varepsilon + 1)^2 \varepsilon_2 - \lambda(x_k + \varepsilon + 1)\varepsilon_1 - \lambda T_k + (x_k + \varepsilon + 1)^2 \varphi(T_k)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь, согласно параграфу 3.1, общее число компонентов принимает вид:

$$\eta_{1k} = -\frac{1}{x_k + \varepsilon + 1}; \quad \eta_{2k} = \frac{1}{x_k + \varepsilon + 1}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Для наглядной интерпретации полученных результатов, используя выражение (24), проведем численный расчёт зависимости теплового потока и

температуры от изменения точки координатной оси Ox по ошибке дискретизации и значению малого параметра. При проведении численных расчётов принимаем функцию $\varphi(T) = \alpha_2 T \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - T^2 \right)$, а также значения λ , α_1 , α_2

в виде: $\rho = 500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $c_\rho = 2.39 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{К})}$; $\lambda = 0,2 \frac{\text{Вт}}{(\text{м} \cdot \text{К})}$; $\alpha_1 = 2500 \frac{\text{Вт}}{(\text{м}^3 \cdot \text{К})}$; $\alpha_2 = 0.005 \frac{\text{Вт}}{(\text{м}^3 \cdot \text{К}^3)}$. Результаты решения начальной задачи $\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0$, $q|_{x=0} = 0$ приведены в табл. 3.

Таблица 3 – Результаты решения начальной задачи

x	0	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.3
T	300.00	237.4535	187.9468	148.7613	117.745	93.1959	73.7647	58.3848	46.2114	36.5761	28.9497
q	0	12.2520	21.9497	29.6256	35.701	40.5101	44.3164	47.3291	49.7137	51.6012	53.0951

Параграф 3.3. посвящен исследованию стационарного распространения тепла в среде цилиндрической формы численным методом. В этом случае, дискретизация системы (12) дает следующие результаты:

$$\begin{aligned}
 T_{k+1} &= T_{k-1} + \frac{2h(x_k + \varepsilon + I)}{M_k(x_k + \varepsilon + I) - \lambda} \left[\varepsilon_2 - \frac{\lambda}{x_k + \varepsilon + I} \varepsilon_1 + \varphi(T_k) \right], \\
 q_{k+1} &= q_{k-1} + \frac{2hM_k(x_k + \varepsilon + I)}{M_k(x_k + \varepsilon + I) - \lambda} \left[\varepsilon_2 - \frac{\lambda}{x_k + \varepsilon + I} \varepsilon_1 + \varphi(T_k) \right].
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Для ясного представления полученных результатов, используя выражение (25), проведем численный расчёт зависимости теплового потока и температуры от изменения точки на координатной оси Ox по ошибке дискретизации и значению малого параметра. Результаты решения начальной задачи приведены в табл. 4.

Таблица 4 – Результаты решения начальной задачи

x	0	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.3
T	300.00	284.0000	267.9998	251.999	235.998	219.997	203.9964	187.9950	171.9933	155.9914	139.9892
q	0	16.000	32.0002	48.000	64.0014	80.0024	96.0036	112.0050	128.0067	144.0086	160.0108

В параграфе 3.4. численным методом исследовано стационарное распространение тепла в среде сферической формы. Дискретизацией системы уравнений (17), согласно параграфу 3.1, являются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 T_{k+1} &= T_{k-1} + \frac{2h(x_k + \varepsilon)(1 - x_k - \varepsilon)}{\lambda(1 - 2(x_k + \varepsilon)) - M_k(x_k + \varepsilon)(1 - x_k - \varepsilon)} \left[\frac{\lambda(1 - 2(x_k + \varepsilon))}{(x_k + \varepsilon)(1 - x_k - \varepsilon)} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varphi(T_k) \right] - \\
 &\quad - \frac{2h\lambda(1 - 2(x_k + \varepsilon))}{(x_k + \varepsilon)(1 - x_k - \varepsilon)[\lambda(1 - 2(x_k + \varepsilon)) - M_k(x_k + \varepsilon)(1 - x_k - \varepsilon)]} T_k, \\
 q_{k+1} &= q_{k-1} + \frac{2hM_k(x_k + \varepsilon)(1 - x_k - \varepsilon)}{\lambda(1 - 2(x_k + \varepsilon)) - M_k(x_k + \varepsilon)(1 - x_k - \varepsilon)} \left[\frac{\lambda(1 - 2(x_k + \varepsilon))}{(x_k + \varepsilon)(1 - x_k - \varepsilon)} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varphi(T_k) \right] - \\
 &\quad - \frac{2h\lambda(1 - 2(x_k + \varepsilon))M_k}{(x_k + \varepsilon)(1 - x_k - \varepsilon)[\lambda(1 - 2(x_k + \varepsilon)) - M_k(x_k + \varepsilon)(1 - x_k - \varepsilon)]} T_k.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

где $\eta_{1k} = \frac{1}{(x_k + \varepsilon)(1 - x_k - \varepsilon)}$ и $\eta_{2k} = \frac{1 - 2(x_k + \varepsilon)}{(x_k + \varepsilon)(1 - x_k - \varepsilon)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) величины, характеризующие коэффициенты зависимости теплового потока от температуры в координатных точках сетки. Разностная схема (26) аппроксимирует систему (17) с погрешностью точности порядком $O(h^2)$.

Используя выражение (26), проведем численный расчёт зависимости теплового потока и температуры от изменения точки на координате оси Ox по ошибке дискретизации и значению малого параметра. Результаты решения начальной задачи приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Результаты решения начальной задачи

x	0	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.3
T	300.0	203.8848	138.5712	94.1859	64.0	43.520	29.5850	20.1132	13.6747	9.2977	6.3221
q	0	12.8154	21.5238	27.4419	31.5	34.1974	36.0553	37.3182	38.1767	38.7603	39.1571

Из таблиц 3-5 следует, что при горении среды возникает тепловая волна, амплитуда которой для указанных выше параметров стремится к постоянному значению $\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} K$. Следует отметить, что для данных условий при температуре T_0 меньше 300К конденсированных сред (на примере дерева) горение является устойчивым. Начальная температура источника приводит к росту теплового потока.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Разработана математическая модель стационарных тепловых процессов в конденсированных средах с учетом регуляризации теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик.

2. Для решения сформулированных в диссертационной работе задач создан математический аппарат в виде аналитического приближенного метода и разностных схем, отличающихся от известных ранее, тем что с их помощью можно решать системы уравнений эллиптического типа с переменными и постоянными коэффициентами и что, существенно, с нелинейными источниками.

3. Установлены основные закономерности стационарного распространения температуры в зависимости от условий состояния равновесия теплового потока и температуры в фазовой плоскости.

4. Разработан математический аппарат в виде аналитического выражения и разностных схем, отличающихся от известных ранее тем, что с их помощью можно решать существенно новые стационарные уравнения математической физики с переменным и постоянным коэффициентами.

5. Определены условия состояния равновесия теплового потока и температуры в фазовой плоскости, при которых тепловой поток и температура перемещают и разлагают область на устойчивую и неустойчивую.

6. Разработаны алгоритмы и программы реализации разностных схем для численного решения уравнений горения в лагранжевых координатах.

7. Разработаны математические модели процессов горения и взрыва в конденсированных телах в виде решения задач: тепловой взрыв в цилиндрическом теле; тепловой взрыв в сферическом теле, распространение тепла в плоской стене с учетом теплообмена в окружающей среде.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Джураев Х. Ш. Исследование зависимости стационарного распределения теплового потока от температуры в конденсированных средах [Текст] / Х.Ш. Джураев, К. Комилов, **А.М. Наджмиддинов** // Вестн. Тадж. нац. ун-та. Сер. естеств. наук. – 2016, № 1/1 (192). – С. 114-120.
2. **Наджмиддинов А. М.** Применение метода фазовой плоскости для краевых задач уравнений нелинейной стационарной теплопроводности [Текст] / А.М. Наджмиддинов // Вестн. Тадж. нац. ун-та. Сер. естеств. наук. – 2015. – № 1/2 (160). – С. 117-121.
3. Джураев Х. Ш. Асимптотическое разложение тепла в твердом теле при независимости источников от температуры, содержащих параметр [Текст] / Х. Ш. Джураев, **А. М. Наджмиддинов** // Вестн. Тадж. нац. ун-та. Сер. Естеств. Наук. – 2014. – №1/1 (126). –С.68-71.
4. Джураев Х. Ш. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными точками [Текст] / Х.Ш. Джураев, **А.М. Наджмиддинов** // Инновации и инвестиции. – 2014. – № 5. – С. 181-183.
5. Джураев Х. Ш. Распространение тепла в твердом теле при независимости источников от температуры, содержащих параметр [Текст] / Х.Ш. Джураев, **А.М. Наджмиддинов** // Вестн. Тадж. нац. ун-та. Сер. естеств. наук. – 2012. – № 1(52). – С. 22-24.
6. Джураев Х. Ш. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнениях второго порядка с сингулярными точками [Текст] / Х.Ш. Джураев, **А.М. Наджмиддинов** // Математический ин-т им. В.А. Стеклова Рос. АН, Самар. гос. техн. ун-т, Четвертая Междунар. конф. “Мат. физика и ее приложения” 25.08-01.09.2014. – М., 2014. – С. 105-110.
7. Джураев Х. Ш. Стационарное распределение плотности теплового потока от температуры в конденсированных средах [Текст] / Х.Ш. Джураев, К. Комилов, **А.М. Наджмиддинов** // Молодёжный науч. вестн. Электрон. науч.-практ. журн. – 2016. – март. – № 3. – С. 3-9.
8. Джураев Х. Ш. Математическое моделирование задач - единство теории и эксперимента [Текст] / Х.Ш. Джураев, **А.М. Наджмиддинов** // Респ. конф. посвящ. 70-летию проф. Б. Алиева. Современные проблемы прикладной математики и информатики, ТНУ – механико-математика. – Душанбе, 2014. – С. 253-256.
9. Джураев Х. Ш. Разностная схема подгонки для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными точками [Текст] / Х.Ш. Джураев, **А.М. Наджмиддинов** // Респ. конф. по ядерно-физ. методам, ТНУ – физ. фак. посвящ. 55-летию каф. ядерной физики. – Душанбе, 2014. – С. 168-171.
10. Джураев Х. Ш. Продолженный плотность тепловой поток на поверхности почвы [Текст] / Х.Ш. Джураев, З.С. Норматов, **А.М. Наджмиддинов** // Материалы науч.-теорет. конф. проф.-преп. состава и студентов ТГНУ, посвящ. 1150-летию А. Рудаки, 24-25 апр. 2008 г. – Душанбе, 2008. – С. 48-50.
11. **Наджмиддинов А.М.** Численное исследование зависимости стационарного распределения теплового потока от температуры в конденсированных средах [Текст] / **А.М. Наджмиддинов**, К. Шаршеев, У. Мамытбеков // Материалы Междунар. науч.-практ. конф. «Современное состояние исследований в области физико-техн. проблем и материаловедения в Кырг. Респ.», посвящ. памяти акад. Нац. АН Кырг. Респ., лауреата Гос. премии

Кырг. Респ. в области науки и техники, Директора Ин-та физики, Президента Нац. АН Ж.Ж. Жеенбаева. – 2016. – № 2. – С. 46-50.

12. **Наджмиддинов А.М.** Стационарное распространение тепла в плоской среде [Текст] / **А.М. Наджмиддинов**, К. Шаршеев, Д.С. Джураев, У. Мамытбеков // Наука новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2016. – № 12. – С. 3-7.

13. **Наджмиддинов А.М.** Стационарное распространение тепла в среде цилиндрической формы [Текст] / **А.М. Наджмиддинов**, К. Шаршеев, Х.Ш. Джураев, У. Мамытбеков] // Наука в современном мире: теория и практика. Материалы IV Междунар. науч.-практ. конф. (Уфа, 29-30 сент. 2016 г.). – Уфа, 2016. – С. 99-103.

14. **Наджмиддинов А.М.** Стационарное распространение тепла в среде сферической формы. [Текст] / **А.М. Наджмиддинов** // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова Бишкек, 2017.– №1(41).–С. 155-159.

Наджмиддинов Асадулло Мирзоевичтин «Конденсацияланган чөйрөдө жылуулукту өткөрүү теориясынын эки өлчөмдүү сызыктуу эмес стационардык кубулуштарын математикалык моделдөө» деген темасындагы 05.13.18 – Математикалык моделдөө, сандык ыкмалар жана программалар комплекси адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын кыскача

КОРУТУНДУСУ

Негизги сөздөр: стационардык кубулуш, жылуулукту өткөрүү теориясы, конденсацияланган чөйрө, жылуулук процесстеринин математикалык моделдөөсү.

Изилдөө объектиси: Конденсацияланган чөйрөдө жылуулукту өткөрүү теориясынын эки өлчөмдүү сызыктык эмес стационардык кубулуштарды математикалык моделдөөсүн иштеп чыгуу процесси.

Иштин максаты болуп жылуулук агымын жана жылуулук физикалык мүнөздөмөлөрдүн температуралык көз карандылыгын тартипке салууну эске алуу менен конденсацияланган нерселерде кийинки опуртал чекиттердин четинде, башкача айтканда ушул заттардын күйүү жана жарылуу шарттарында чыгарылыштарды аналитикалык жана сандык изилдөө менен сызыктуу эмес эки өлчөмдүү коюлуштарда стационардык жылуулук процесстеринин математикалык моделдөөсүн иштеп чыгуу саналат.

Изилдөө ыкмалары: жылуулук физикасынын жана жылуулук техникасынын ыкмаларын, теориялык физиканы, дифференциалдык теңдемелер жана математикалык физика теорияларын, тескери жана орой маселелер теориясын колдонууга негизделген, ошондой эле ишти жазууда аналитикалык, дискретизация, сандык жана тартипке салуу ыкмалары колдонулган.

Алынган натыйжалар. Жылуулук агымын жана жылуулук физикалык мүнөздөмөлөрдүн температуралык көз карандылыгын тартипке салууну эске алуу менен конденсацияланган чөйрөлөрдө стационардык жылуулук процесстерин сүрөттөө үчүн жалпылашкан математикалык модели иштелип чыккан; мурункулардан өзгөрмө жана туруктуу коэффициент менен математикалык физиканын стационардык теңдемелеринин негизинде олуттуу жаңы колдонмо маселелерин чыгарууга жардам берүүсү менен айырмаланган аналитикалык туюнтмалар жана айырмалуу схемалар түрүндө математикалык аппарат сунушталган; жылуулук агымы жана температуралар фазалык тегиздикте жылышып, туруктуу жана туруктуу эмес бөлүктөргө ажыраган

конденсацияланган чөйрөдө жылуулук алмашуу шарттары жана теңдештик абалы аныкталган.

Изилдөө натыйжаларын колдонуу:

Иштелип чыккан алгоритмдер жана диссертациялык изилдөөнүн натыйжалары “Тажикстан Республикасынын Илимдер академиясынын Өнөр-жай илимий изилдөө институтунун” чакан СЕЧ (суу электр чордонлору) үчүн энергетикалык орнотмолорду долборлоодо колдонулган. Диссертациялык изилдөөнүн теориялык натыйжалары Тажик улуттук университетинин жана Тажик финансылык-экономикалык институтунун окуу процессинде колдонулган.

Колдонуу тармагы.

Диссертациялык иште иштелип чыккан программалардын сандык ыкмалары жана комплекстери күйүү процесстеринин негизинде жаткан физикалык механизмдерди, өндүрүштүк шарттарда механизмдердин жана технологиялык жабдуулардын иштөөсүнүн натыйжалуулугуна, узактыгына түздөн-түз таасир эткен туруктуулугун аныктоого мүмкүнчүлүк түзөт.

РЕЗЮМЕ

диссертации Наджмиддинова Асадулло Мирзоевича на тему «Математическое моделирование двумерных нелинейных стационарных явлений теории переноса тепла в конденсированных средах» на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Ключевые слова: стационарные явления, теория переноса тепла, конденсированная среда, математическое моделирование тепловых процессов.

Объект исследования: процесс разработки математического моделирования двумерных нелинейных стационарных явлений теории переноса тепла в конденсированных средах.

Цель работы: является разработка математического моделирования стационарных тепловых процессов в конденсированных телах с учётом регуляризации теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик, нелинейной двумерной постановке, с последующим аналитическим и численным исследованием решений в окрестности критических точек, то есть в условиях горения и взрыва этих веществ.

Методы исследования: основаны на использовании методов теплофизики и теплотехники, теоретической физики, теории дифференциальных уравнений и математической физики, теории обратных и некорректных задач, а также при написании были использованы аналитические, дискретизации, численные и методы регуляризации.

Полученные результаты. Разработана обобщённая математическая модель для описания стационарных тепловых процессов в конденсированных средах с учётом регуляризации теплового потока и температурной зависимости теплофизических характеристик; предложен математический аппарат в виде аналитического выражения и разностных схем, отличающихся от известных ранее тем, что с их помощью можно решать существенно новые прикладные задачи на основе стационарного уравнения математической физики с переменным и постоянным коэффициентом; определены условия теплообмена и состояния равновесия в конденсированной среде, при которых тепловой поток и температуры в фазовой плоскости перемещаются и разлагаются в устойчивых и неустойчивых областях.

Использование результатов исследования:

Разработанные алгоритмы и результаты диссертационного исследования были использованы в проектировании энергетических установок для малых ГЭС «НИИ Промышленности АН РТ». Теоретические результаты диссертационного исследования используются в учебном процессе Таджикского национального университета и Таджикского финансово – экономического института.

Область применения.

Численные методы и комплексы разработанных в диссертационной работе программ позволяет выявить физические механизмы, лежащие в основе процессов горения, его устойчивость, которые непосредственно отражаются на эффективности, долговечности работы механизмов и технологических оборудований в производственных условиях.

SUMMARY

on Asadullo Najmiddinov's thesis «Mathematical modeling of two-dimensional nonlinear stationary phenomena of the theory of heat transfer in condensed media» for scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences in specialty 05.13.18 - Mathematical modeling, numerical methods and program complexes.

Keywords: stationary phenomena, heat transfer theory, condensed matter, mathematical modeling of thermal processes.

The object of the study. The process of developing mathematical modeling of two-dimensional nonlinear stationary phenomena of the theory of heat transfer in condensed media.

Objective: Is the development of mathematical modeling of stationary thermal processes in condensed bodies, taking into account the regularization of the heat flux and the temperature dependence of thermophysical characteristics, nonlinear two-dimensional formulation, followed by analytical and numerical investigation of solutions in the vicinity of critical points, that is, in the conditions of combustion and explosion of these substances.

Methods: Based on the use of methods of thermal physics and heat engineering, theoretical physics, the theory of differential equations and mathematical physics, the theory of inverse and ill-posed problems, as well as analytical, discretization, numerical and regularization methods.

Results. A generalized mathematical model for the description of stationary thermal processes in condensed media with consideration for the regularization of the heat flux and the temperature dependence of the thermophysical characteristics is developed; A mathematical apparatus is proposed in the form of analytical expression and difference schemes, which differ from those known earlier in that they can be used to solve essentially new applied problems on the basis of a stationary equation of mathematical physics with a variable and constant coefficient; Heat exchange conditions and equilibrium states in a condensed medium are determined under which the heat flux and temperatures in the phase plane move and decompose in stable and unstable regions.

Using the results of the study:

The developed algorithms and results of the dissertation research were used in the design of power plants for small hydro power plants "Research Institute of Industry of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan". The theoretical results of the dissertation research are used in the educational process of the Tajik National University and the Tajik Financial and Economic Institute.

Range of applications.

Numerical methods and complexes developed in the thesis work programs allows us to identify the physical mechanisms underlying the combustion processes, its stability, which directly affect the efficiency, durability of the operation of machinery and technological equipment in production conditions.

Наджмиддинов Асадулло Мирзоевич



**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ
НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЯВЛЕНИЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА
ТЕПЛА В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ**

Автореферат диссертации

Подписаны к печати 14.08.2017.

Формат 60x84 1/16 Объем 1.25 п.л.

Бумага офсетная. Тираж 120 экз. Заказ №389

720020, г.Бишкек, ул. Малдыбаева, 34,б
Кыргызский государственный университет строительства,
транспорта и архитектуры им. Н. Исанова

Учебно-издательский центр «Авангард»