КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

И.РАЗЗАКОВ АТЫНДАГЫ КЫРГЫЗ МАМЛЕКЕТТИК ТЕХНИКАЛЫК УНИВЕРСИТЕТИ

Н.ИСАНОВ АТЫНДАГЫ КЫРГЫЗ МАМЛЕКЕТТИК КУРУЛУШ, ТРАНСПОРТ ЖАНА АРХИТЕКТУРА УНИВЕРСИТЕТИ

Д 01.15.505 Диссертациялык кеңеши

Кол жазма укугунда
УДК 539.3

ЗАКИРЬЯНОВА ГУЛЬМИРА КОЖАХМЕТОВНА

ТАТААЛДАШКАН КАСИЕТТЕРГЕ ЭЭ БОЛГОН ЧӨЙРӨНҮН ДИНАМИКАСЫНЫН ЧЕТТИК МАСЕЛЕЛЕРИНИН ФУНДАМЕНТАЛДЫК ЖАНА ЖАЛПЫЛАНГАН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

01.02.04 – деформацияланууучу катуу телонун механикасы

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИНИН ДОКТОРУ ОКУМУШТУУ ДАРАЖАСЫН ИЗДЕНҮҮ ДИССЕРТАЦИЯСЫНЫН

АВТОРЕФЕРАТЫ

Бишкек - 2016

Диссертациялык иш И. Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университетинде аткарылган.

Илимий кеңешчиси:	физика-математика илиминин доктору, профессор **Алексеева Л.А.**
Расмий оппоненттери:	физика-математика илиминин доктору, профессор **Тюреходжаев А.Н.** физика-математика илиминин доктору, профессор **Назарова Л.А.** физика-математика илиминин доктору, профессор **Рычков Б.А.**
Жетектөөчү уюму:	Институт сейсмостойкости сооружений АН Руз, Өзбекстан Республикасы, 100125, Ташкент ш., “Дурмон йули” көчөсү, 31. Тоо иши институту

Диссертация 720044, Бишкек ш., Тынчтык проспекти, 66, 1/314 ауд. дареги боюнча И. Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университети жана Н. Исанов атындагы Кыргыз мамалекеттик курулуш, транспорт жана архитектура университетинин алдындагы Д 01.15.505 Диссертациялык кеңештин бириккен отурумунда 2016-жылдын 9-декабрында жакталат.

Диссертация менен И. Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университетинин (720044, Кыргыз Республикасы, Бишкек ш., Тынчтык проспекти, 66, 1/314 ауд.) жана Н. Исанов атындагы Кыргыз мамалекеттик курулуш, транспорт жана архитектура университетинин (720020, Кыргыз Республикасы, Бишкек ш., Малдыбаев көчөсү, 34б) китепканаларынан таанышып чыгууга болот.

Автореферат 2016-жылдын 3-ноябрында жөнөтүлдү.

Диссертациялык кеңештин
окумуштуу катчысы, ф.-м.и.к. Мекенбаев Б.Т.

ИШТИН ЖАЛПЫ МҮНӨЗДӨМӨСҮ

Иштин актуалдуулугу. Стационардык жана стационардык эмес күчтөрдүн таасирлерине, тышкы таасирлерге, топтолгон булактардын таасирине, табигый же жасалма дүүлүгүүлөрдүн аракетинин натыйжасында келип чыккан толкундардын пайда болушуна, таралуусуна жана дифракциясына байланыштуу туташ чөйрөлөрдөгү динамикалык процесстерди изилдөө татаал илимий-техникалык көйгөйлөрдүн катарына кирет. Ал территориясынын көп бөлүгү жогорку сейсмикалык активдүүлүк зонасында жаткан өлкөлөрдүн санына кирген Орто Азия өлкөлөрү үчүн өзгөчө актуалдуу болгон инженердик-техникалык ар түрдүү маселелердин чечилиштери менен тыкыс байланышкан. Бул региондогу тоо кендерин казып чыгаруучу өнөр жайдын өтө өнүккөндүгүнө байланыштуу жер астындагы курулуштардын (шахталар, жер астындагы сактагычтардын, тоннелдердин, метрополитендердин ж.б.) бекемдигин, мыктылыгын жана туруктуулугун камсыз кылуу көйгөйү курч турат. Бул маселелер айланадагы массивдин түзүлүшү жана өзгөчөлүктөрү, чөйрөлөрдүн бөлүнгөн чек араларындагы байланыштык (контакттык) өз ара аракеттешүү мүнөзү, курулуштардын салынышынын тереңдиги, колдонуудагы транспорттук жана башка нагрузкалардын тиби жана сейсмикалык таасир көрсөтүүлөрүнүн күчү менен тыкыс байланышкан.

Анык физикалык процесстерди адекваттуураак түшүндүрүү максатында телолордогу жана чөйрөлөрдөгү толкун процесстеринин математикалык моделдерин иштеп чыгуу актуалдуу фундаменталдык илимий көйгөй болуп эсептелет жана гиперболалык системалардын теңдемелери, аралаш типтеги теңдемелер үчүн четтик маселелердин чыгарылышын түзүүгө да байланыштуу. Мына ушундай теңдемелер үчүн четтик маселелердин математикалык теориясы чөйрөлөрдөгү динамикалык процесстердин татаалдыгына байланыштуу жетишээрлик түрдө өнүккөн эмес. Чөйрөнүн анык касиеттерин эсепке алуу үчүн бул жерде деформацияланууучу катуу телолордун (изотроптук анизотроптук, серпилгич, пьезосерпилгич жана эки компоненттүү чөйрөлөр) механикасынын моделдерин колдонуу менен, сейсмикалык толкундардын таралуу учурундагы тектүү массивдин динамикасынын математикалык моделдери иштелип чыгууда.

Азыркы убакта эң көп изилденген – бул сызыктуу серпилгич изотроптук модель, бирок ал үчүн дагы чыгарылган дифракциялык маселелердин классы тардык кылат, ал негизинен өзгөрмөлөрдүн бөлүнүшүнө маселелер жол берген классикалык формалардын чек аралары үчүн туура келет. Өзүнүн характеристикалары боюнча анык (реалдуу) чөйрөлөргө толкундардын таралуусу татаалыраак закон ченемдүүлүктөргө баш ийген анизотроптук серпилгич чөйрө жакын: анда лакундардын болушу да байкалат. Бул кубулуш багыттарда кескин байкалган, катуулук басымдуулук кылган күчтүү анизотроптук чөйрөнүн толкундук касиеттерине байланыштуу.

Серпилгичтик теориясынын динамикалык маселелеринин ичинде жыштыктын дискреттик спектринин болушу учурундагы телолордогу эркин термелүүлөрдү пайда кылган туруктууланган термелүүлөр маселелери өзгөчө орунду ээлейт. Мына ушундай жыштыкта ошол эле жыштыктагы дүүлүктүрүүчү күчтүн аз убакыт аракеттенүүсүндө чоң деформациялар пайда болот, алар туруктуулукту жоготууга жана конструкциялардын бузулуусуна алып келет. Ошондуктан мындай маселелерди изилдөө практикалык кызыгууну пайда кылаары шексиз.

Серпилгичтик теориясы боюнча изилдөөлөрдө маанилүү орунду механикалык чыңалуулардын жана деформациялардын талаасынын жаратылышынын башка физикалык талаалар (жылуулук, электр магниттик ж.б.) менен болгон байланышын эсепке алган байланышкан маселелер ээлейт. Бул жерде серпилгич деформация жана электр талаасы өз ара байланышкан борбордук симметриянын жоктугу менен мүнөздөлгөн пьезосерпилгич чөйрөлөрдөгү толкундук процесстер каралган. Пьезоэффектти изилдөөгө карата кызыгуу анын колдонулушунун кеңири спектри менен түшүндүрүлөт: жыштыкты стабилдештирүү жана контролдоо үчүн радиотехникалык түзүлүштөр, кварц сааттары, суу астында жүрүүчү кайыктарды табуу үчүн приборлор жана башка көп нерселер.

Туташ чөйрөлөрдүн динамикасынын маселелеринин өзгөчө классын аракеттеги нагрузкалары белгилүү ыламдык менен кыймылдаган транспорттук маселелер түзөт. Ушуну менен бирге, бир нече жолу кайталанышы мүмкүн болгон, сейсмикалык толкундардын таралуу ылдамдыктарынын жана массивдин серпилгич касиеттерин эсепке алуу менен транспорттук нагрузканын ылдамдыктарынын ортосундагы ара катыштар маанилүү ролду ойнойт. Анык (реалдуу) тектүү массив катуу майда тешиктүү скелеттен турган, тайжрыйбалар көрсөткөндөй, жер титирөөнүн борборунун калыптануу процессине жана сейсмикалык толкундардын таралышына маанилүү таасир тийгизген суюк жана газ түрүндөгү компоненттерди камтыган татаал көпкомпоненттүү чөйрө. Бул маселелер классы ар түрдүү транспорттук же транспорттолуучу объекттердин айлана-чөйрөгө таасир этишин изилдөөдө моделдик болуп эсептелет.

Изилдөөнүн максаты – деформацияланууучу катуу телонун динамикасынын четтик маселелерин жана кыймылынын теңдемесинин чыгарылыш ыкмаларын иштеп чыгуу жана алардын негизинде татаалдашкан касиеттерге ээ болгон чөйрөлөрдөгү толкундардын таралуу процесстерин изилдөө.

Изилдөөнүн милдеттери:

- жалпыланган функциялар теориясынын негизинде серпилгич анизотроптук чөйрөлөрдүн динамикасынын фундаменталдык жана жалпыланган теңдемелеринин чыгарылыштарын түзүүнүн ыкмаларын иштеп чыгуу; чыгарылыштардын толкундук жана асимптотикалык касиеттерин изилдөө, сокмо толкундардын фронтторунда шарттарды түзүү;
- анизотропиянын даражасынын серпилгич чөйрөнүн толкундук касиеттерине тийгизген таасирин изилдөө, сандык эксперименттер;

- стационардык эмес таасирдеги жана стационардык термелүүлөр болгон учурдагы анизотроптук телолордун динамикасынын четтик маселелерин чыгаруу, ошондой эле пьезосерпилгич чөйрөлөрдүн динамикасынын стационардык эмес четтик маселелерин чыгаруу үчүн жалпыланган функциялардын ыкмасын иштеп чыгуу;
- транспорттук нагрузкалардагы (жүктөмдөрдөгү) Бионун эки компоненттүү чөйрөсүнүн кыймылынын теңдемесинин жалпыланган жана фундаменталдык чыгарылыштарын түзүү; топтолгон нагрузкалардын кыймылдоо учурундагы чөйрөнүн динамикасын изилдөө, сандык эксперименттер.

Изилдөөлөрдүн объектиси: серпилгич анизотроптук жана пьезосерпилгич чөйрөлөр, ошондой эле изотроптук М. Бионун чөйрөсү.

Изилдөөнүн предмети: динамикалык таасир кылуудагы деформациялануучу катуу телолордун толкундук динамикасы.

Изилдөөлөрдүн ыкмалары: туташ чөйрөлөрдүн механикасынын моделдерин колдонуу менен дифференциалдык теңдемелерди чыгаруунун аналитикалык жана сандык ыкмалары: интегралдык өзгөртүп туюнтуу ыкмасы, чек аралык интегралдык теңдемелер ыкмасы, жалпыланган функциялар ыкмасы ж.б. Fortran тилиндеги, MathCad-14 системасындагы чыгарылыштарды программалоо жана ишке ашыруу.

Иштин илимий жаңылыгы:

- Стационардык эмес таасирлердеги анизотроптук серпилгич жана пьезосерпилгич чөйрөлөрдүн, ошондой эле серпилгич анизотроптук телолордун стационардык термелүү динамикасынын четтик маселелерин чыгаруу үчүн жалпыланган функциялардын ыкмасы иштелип чыккан. Жалпыланган функциялар мейкиндигиндеги мына ушундай чөйрөлөрдүн кыймылынын теңдемелеринин жалпыланган чыгарылыштары, жалпыланган функциялар мейкиндигиндеги Сомильяндын, Гаусстун формулаларынын аналогдору түзүлгөн. Анизотроптук чөйрөлөрдүн динамикасынын коюлган четтик маселелерин чыгаруу үчүн интегралдык чек аралык сингулярдык теңдемелер түзүлгөн.
- Энергиянын сакталуу закону, толкундун фронтундагы ыламдыктын кескин өзгөрүүсүн чыңалуунун кескин өзгөрүүсү менен байланыштырган ылдамдыктын кескин өзгөрүү фронтторундагы импульстарды сактоонун шарттары алынган.
- Фурье жана Лапластын жалпыланган функцияларын өзгөртүп туюнтуунун негизинде анизотроптук чөйрөлөрдүн (жалпак жана мейкиндик деформациясында) кыймылынын теңдемелери үчүн Гриндин тензорлору, фундаменталдык чыңалуулардын тензорлору жана алардын убакыт боюнча эң биринчи түрлөрү түзүлгөн, алардын асимптотикалык касиеттери изилденген.
- Сандык эксперименттердин негизинде топтолгон импульстук булактардын аракети астындагы анизотроптук тектүү массивдин даражасынын анын

чыңалуу-деформацияланууччу абалынын мүнөзүнө тийгизген таасири изилденген.

- Жалпак деформация жагдайындагы жана анын анизотропиясын эсепке алуу менен, күндүзгү бетине жакын дүүлүгүүлөрдүн булактарынын аракети астындагы тектүү массивдердин динамикасынын математикалык модели иштелип чыккан. Анизотроптук жарым тегиздик үчүн динамиканын биринчи жана экинчи четтик маселелеринин Грин тензорунун трансформанты түзүлгөн.
- Үндүүдөн үндөн озгонго чейинки ылдамдыктардын бүт диапазонундагы транспорттук нагрузкалар учурундагы жер астындагы массивдердин сууга каныккандыгын эсепке алууга мүмкүндүк берген эки компонентүү Биону чөйрөсүнүн кыймылынын фундаменталдык жана жалпыланган чыгарылыштары түзүлгөн. Үндөн озгон нагрузкалар үчүн толкун фронтторундагы шарттар алынган.

Жактоого чыгарылып жаткан диссертациянын негизги жоболору:

- стационардык эмес таасирлердеги анизотроптук серпилгич жана пьезосерпилгич чөйрөлөрдүн, ошондой эле серпилгич анизотроптук телолордун стационардык термелүүлөр учурундагы серпилгич анизотроптук телолордун динамикасынын четтик маселелерин чыгаруу үчүн жалпыланган функциялардын ыкмасынын иштелмеси; сокмо толкундар фронтторундагы шарттарды түзүү;
- анизотроптук чөйрөнүн (жалпак жана мейкиндик деформациясында) кыймылынын стационардык эмес теңдемелеринин Грин тензорлорун – фундаменталдык чыгарылыштарды түзүү;
- жалпак деформациядагы серпилгич жарым мейкиндиктин динамикасынын стационардык эмес биринчи жана экинчи четтик маселелеринин Грин тензорун түзүү;
- үндүүдөн үндөн озгонго чейинки ылдамдыктардын бүт диапазонундагы транспорттук нагрузкалар учурундагы эки компонентүү Биону чөйрөсүнүн кыймылынын фундаменталдык жана жалпыланган чыгарылыштарын түзүү;
- жалпыланган функциялар мейкиндигиндеги Сомильяндын, Гаусстун формулаларынын динамикалык аналогдорун жана алардын негизинде берилген четтик маселелерди чыгаруу үчүн сингулярдык чек аралык интегралдык теңдемелерди түзүү.

Диссертациянын темасынын чоң илимий программалар (долбоорлор) менен байланышы. Диссертациялык иш "Дифракция волн в упругих, термоупругих и многокомпонентных средах " (2012-2014-жж., «Моделирование динамики массива при сейсмических воздействиях» (2013-2015-жж., «Волновая динамика упругих, термоупругих и двухкомпонентных сред» (2015-2017-жж. илимий-изилдөө иштеринин бир бөлүгү болуп эсептелет.

Изилдөөнүн жыйынтыктарынын апробациялары. Иштин негизги жыйынтыктары көптөгө эл аралык конференцияларда билдирилген:

Теориялык жана прикладдык (колдонмо) механикасы боюнча Бүткүл россиялык съездер (VIII, 2001; IX, 2006), «Mathematical Theory of Hyperbolic Systems of Conservation Laws» (Newton Institute, Cambridge, UK, 2003), 5th European Solid Mechanics Conference (ESMC–5) (Thessaloniki, Greece, 2003), X Int. Conf. on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications (Osaka, Japan, 2004), “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы” Москва математика коомунун бириккен отуруму жана семинары (Москва, 2007), 4th Congress of TWMS (Baku, 2011), “Туташ чөйрөнүн механикасынын заманбап көйгөйлөрү” (Бишкек, 2012), 9 ISAAC Congress (Poland, 2013), “Рахматулин-Ормонбеков окуулары” (Бишкек, 2013), International Conf. on Generalized Functions GF2014 (Southampton, UK, 2014), EUROMECH Colloquium «Recent trends in modeling of moving loads on elastic structures» (Turkey, 2015), 10 ISAAC Congress (Macao, 2015), ICAAM 2016, (Almaty).

Илимий жыйынтыктардын аныктыгы туташ чөйрөлөрдүн механикасынын фундаменталдык закондорун колдонууга, чыгарыла турган маселелердин математикалык корректүүлүк менен коюлганына жана чыгарылуучу маселелерде математикалык ыкмаларды так колдонууга негизделген. Алынган чыгарылыштар жеке учурларда деформациялануучу катуу телонун механикасынын белгилүү формулалары жана ара катыштары менен дал келет.

Алынган жыйынтыктардын теориялык жана практикалык маанилүүлүгү. Сунушталган ыкма сокмо (урма) толкун менен бирге жүргөн татаалдашкан касиеттерге ээ болгон деформациялануучу катуу чөйрөлөрдөгү физикалык процесстерди изилдөөгө мүмкүндүк берет.

Изденүүчүнүн өздүк салымы. Серпилгич анизотроптук жана пьезосерпилгич чөйрөлөрдүн, ошондой эле М.Бионун изотроптук эки компоненттүү чөйрөсүнүн динамикасынын стационардык эмес жана стационардык маселелерин чыгаруу үчүн жалпыланган функциялардын ыкмасы иштелип чыккан.

Публикациялардагы диссертациянын жыйынтыктарынын көрсөтүлүшүнүн толуктугу. Изилдөөлөрдүн жыйынтыктары боюнча 70тен ашык иш жарыяланган.

Диссертациянын түзүмү жана көлөмү. Диссертация киришүү, 7 глава, корутунду, 210 аттан турган колдонулган булактардын тизмесинен турат. Диссертациянын көлөмү 35 сүрөттү эсептегенде текстин 204 бетин камтыйт.

Автор бул көйгөйгө кызыгууга тарткандыгы, берген илимий консультациялары жана бул ишке карата дайыма көңүл бургандыгы үчүн илимий консультанты ф.-м.и. доктору, профессор Л.А. Алексеевага терең ыраазычылык билдирет.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН НЕГИЗГИ МАЗМУНУ

Диссертациянын **Киришүү бөлүгүндө** ишке жалпы мүнөздөмө берилген: диссертациялык теманын актуалдуулугу, иштин илимий жаңылыгы, диссертациялык теманын чоң илимий программалар менен байланышы, изилдөөнүн максаты жана милдеттери, алынган натыйжалардын практикалык маанилүүлүгү, жактоого алып чыгып жаткан диссертациянын негизги жоболору, изденүүчүнүн өздүк салымы, изилдөөнүн апробацияларынын натыйжалары, публикациялардагы диссертациянын жыйынтыктарынын көрсөтүлүшүнүн толуктугу, диссертациянын түзүмү жана көлөмү.

Биринчи главада адабияттын обзору, көйгөйдүн абалы берилген.

Экинчи глава серпилгич анизотроптук чөйрөлөрдүн динамикасынын стационардык эмес маселелеринин жалпыланган чыгарылыштарын түзүүгө арналган. Туташ чөйрөлөрдөгү толкундардын таралуу процесси эреже катары, гиперболалуу теңдемелер жана системалар менен түшүндүрүлөт. Гиперболалуу теңдемелер үчүн алардын үстүндөгү чыгарылыштардын өзү же алардын туундулары үчүн үзгүлтүктүү характеристикалык беттердин болушу мүнөздүү. Физикалык процесстерде алар фронттордо изилденип жаткан процесстердин характеристикаларын (ылдамдык, чыңалуу, басым, температуранын градиенти ж.б.) көрсөткөн сокмо толкундарды түшүндүрөт, кескин өзгөрүүлөрү болушу мүмкүн. Четтик маселелердин математикалык теориялары мындай теңдемелер үчүн жалпыланган функциялардын теориясынын аппаратын колдонууну талап кылат, анткени эреже катары, мындай теңдемелердин чыгарылыштары жалпыланган функциялар классына таандык. Ошондуктан главанын башында жалпыланган функциялар теориясынан мындан аркы изилдөөлөр үчүн зарыл болгон кээ бир маалыматтар берилеген. Андан ары ушул эле главада антижалпак деформация шартындагы серпилгич анизотроптук чөйрөнүн кыймылын сүрөттгөн экинчи катардагы так гиперболалуу теңдеме үчүн стационардык эмес четтик маселенин коюулушу каралган. Каралып жаткан чөйрөлөрдүн кыймылынын жалпыланган чыгарылышынын теңдемеси катары сокмо толкундар каралып чыккан, толкундук фронттордогу шарттар берилген. Сокмо толкундарды эсепке алып, жалпыланган функциялар теориясынын ыкмаларын колдонуу менен энергиянын сакталуу закону алынган. Каралып жаткан теңдемелер үчүн алардын фундаменталдык чыгарылыштары түзүлгөн. Жалпыланган функциялар мейкиндигиндеги Грин жана Гаусстун формулаларынын динамикалык аналогдору түзүлгөн, алардын интегралдык болжолдоолору алынган.

C_{ij}^{ml} серпилгич турактуу төртүнчү рангдагы тензор менен мүнөздөлгөн, индекстердин орун алмаштыруусуна карата симметриянын касиеттерине ээ болгон

$$C_{ij}^{ml} = C_{ij}^{lm} = C_{ji}^{ml} = C_{ml}^{ij}, \quad i, j, m, l = \overline{1,3} \tag{1.1}$$

серпилгич бир тектүү анизотроптук чөйрө каралат.

Бул тензордун түзүмү каралып жаткан чөйрөнүн анизотроптук тибин аныктайт. Жалпысынан алган учурда далилсиз анизотропиянын константаларынын серпилгичтик тензору 81 компонент менен аныкталат, бирок (1.1) симметриянын касиеттерине карай жана координаттардын декарттык системасынын окторунун багыттарын өз алдынча тандоодо, алардын ичинен 21 чоңдук көз аранды эмес болуп эсептелет.

(1.1) симметриясынын C_{ij}^{ml} ара катыштары $C_{\alpha\beta}$ $\left(\alpha,\beta=\overline{1,6}\right)$ тензорун $C_{\alpha\beta}$ $\left(\alpha,\beta=\overline{1,6}\right)$ квадраттык матрицасы түрүндө берүүгө мүмкүндүк берет. (ij), (ml) жуп индекстер жана α, β индекстеринин ортосундагы дал келүү $(11)\leftrightarrow 1$, $(22)\leftrightarrow 2$, $(33)\leftrightarrow 3$, $(23)=(32)\leftrightarrow 4$, $(31)=(13)\leftrightarrow 5$, $(12)=(21)\leftrightarrow 6$ схемасы боюнча табылат. Гуктун законунун серпилгич анизотроптук чөйрөсү үчүн σ_{ij} чыңалуулар тензорун жана ε_{ij} деформациясын байланыштыруучу катары төмөндөгүдөй түрдө жазылат

$$\sigma_{im}(x,t)=C_{ij}^{ml}\varepsilon_{jl}(x,t), \quad \varepsilon_{jl}(x,t)=\partial u_j/\partial x_l=u_{j,l}(x,t) \qquad (1.2)$$

$x=(x_1,...,x_N)$ болгон жерде, $N-$ мейкиндиктин өлчөмдөштүгү (физикалык маселелердеги жалпак деформацияда $N=2$, $N=3$ жагдайына туура келет). Көбөйтүндүдөгү кайталануучу индекстер боюнча болжолдонгон суммалоо. Мындан ары сумманын белгисин түшүрүп коёбуз.

Антижалпак дефформация шарттарында күчтүк-деформацияланган абалдын характеристикасы (мүнөздөмөсү) x_1,x_2 координаттарынан гана көз каранды, $u(x,t)$ чөйрөнүн которуу векторунун эки компоненти, мисалы, $u_1=u_2=0$, $n_3=0$.

Анда $u=u_3(x_1,x_2,t)$, $\sigma_{31}\neq 0$, $\sigma_{32}\neq 0$, чыңалуулар тензорунун калган компоненттери нөлгө барабар.

Антижалпак дефформация жагдайында анизотроптук чөйрөнүн кыймылынын теңдемесинин системасы бир гиперболалык теңдемеге келип такалат жана анын түрү каралып жаткан чөйрөдөн көз каранды. Жалпысынан алганда бул теңдеме туруктуу коэффициенттери бар экинчи катардагы так гиперболалык теңдеме.

$$\sum_{i,j}^{N}\left(a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(x,t)=G(x,t), \quad (x,t)\in R^{N+1} \qquad (1.3)$$

$\rho=const$ коэффициенти – чөйрөнүн тыгыздыгы, $a_{ij}=a_{ji}=const$ чөйрөнүн серпилгич константаларына туура келүүчү коэффициенттер, $a_{ij}\xi_i\xi_j\geq\lambda\|\xi\|$ так гиперболалуулуктун шарттарын канагаттандырат,

$\lambda=const>0$, $G(x,t)-$ массалык күчү.

Төмөндө бул белгилөөлөр киргизилген:

$u_{,i}=\partial u/\partial x_i$, $u_{,ij}=\partial^2 u/\partial x_i\partial x_j$, $\dot{u}=u_{,t}=\partial u/\partial t$, $\ddot{u}=u_{,tt}=\partial^2 u/\partial t^2$.

Мейли $u(x,t)$ – теңдеменин (1.3) чыгарылышы десек – туундулар кескин өзгөрүүсү мүмкүн болгон балким R^{N+1} козголбос жана R^N кыймылдуу (толкундук фронт F_t) F характеристикалык беттен тышкары дээрлик бардык жерде эки жолу дифференцияланууучу функция. Ушундай беттин F теңдемеси төмөндөгүдөй түрдө болот $a_{ij}v_i v_j-\rho v_t^2=0$.

Кескин өзгөрүүлөрдүн шарттарын чыгаруу үчүн жалпыланган функциялардын теориясынын аппараты колдонулган. F_t толкундук фронттогу f функциясынын кескин өзгөрүүсүн $\left[f\right]_{F_t}$ аркылуу белгилейбиз:

$$\left[f(x,t)\right]_{F_t} = f^{+}(x,t) - f^{-}(x,t) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(f(x+\varepsilon m,t) - f(x-\varepsilon m,t)\right), \quad x\in F_t$$

бул жерде $m(x,t)=(m_1,...,m_N)$ $-F_t$ бетине карата нормалдын бирдик вектору, толкун фронтунун таралуу жагына багытталган, $f^{+}-F_t$ нормалы тарабынан функциянын мааниси, f^{-} – карама-каршы жактан.

Т е о р е м а 1.1. Эгер $u(x,t)$ кескин өзгөрүүгө карата шарттар аткарылган толкундук фронттордон тышкары дээрлик бардык жерде (1.3) теңдемесин канагаттандырса:

$$\left[u(x,t)\right]_{F_t} = 0 \qquad (1.4)$$

$$\left[a_{ij}u,_i m_j + \rho c u,_t\right]_{F_t} = 0 \qquad (1.5)$$

анда $\hat{u}(x,t)$ жалпыланган чыгарылышы болуп эсептелет (1.3).

Н а т ы й ж а с ы. Толкундун фронтундагы үзгүлтүксүз чыгарылыш шартынан толкундук фронттогу $u(x,t)$ үзгүлтүксүздүктүн жаныма туунду функцияларынын шарты келип чыгат, ал мындай түргө ээ:

$$\left[cu,_i - u,_t m_t\right]_{F_t} = 0,\ i=\overline{1,N} \qquad (1.6)$$

$\left(\partial_t^2 - c^2\Delta\right)u = f(x,t)$ Даламбердин теңдемесинен айырмаланып толкун фронтундагы c ылдамдыгы туруктуу эмес экенин белгилеп коелу жана ал толкун фронтунун ар бир чекитинин нормалынын багытынан көз каранды

$$c_{\min} \le c < c_{\max},\ \text{бул жерде}\ c_{\min} = \min\left\{a_{ij}\, m_i\, m_j / \rho\right\},\ c_{\max} = \max\left\{a_{ij}\, m_i\, m_j / \rho\right\}$$

Экинчи катардагы гиперболалык теңдеме үчүн четтик маселе коюу.

$x\in S^{-}\subset R^N$ областында Ляпунованын чектелген бети S болсо, $t\ge 0$ болгондогу (1.3) теңдемеси үчүн четтик маселенин чыгарылышын түзүү талап кылынат. $D^{-} = S^{-}\times[0,\infty)$ аркылуу мейкиндик-убакыттык цилиндрин белгилейли: $(x,t)\in D^{-}$, $D = S\times\left[0,\infty\right)$, $n=(n_1,...,n_N)$ – тышкы нормалдын бирдик вектору S $\left(\|n\|=1\right)$ бетине карата: $x_1,x_2\in S$ үчүн $\|n(x_2)-n(x_1)\| = O\left(\|x_2-x_1\|\right)$. $G\in C(D^{-}\cup D)$ деп болжолдонот.

Четтик I. $t=0$ болгондогу баштапкы шарттарды

$$u(x,0)=u^0(x),\ x\in\left(S^{-}\cup S\right),\ u,_t(x,0)=u^1(x),\ x\in S^{-}, \qquad (1.7)$$

Дирихле шарттарын

$$u(x,t)=u^S(x,t),\ \ x\in S,\ \ t\ge 0 \qquad (1.8)$$

жана толкундук фронттордун шарттарын (1.6) – (1.7) канагаттандырган (1.3) теңдемесинин чыгарылышын табуу.

Четтик маселе II . $t=0$ болгондогу баштапкы шарттарды (1.9), Нейман шарттары тибиндей шарттарды

$a_{ij}u,_i n_j = g_i(x,t),\ \ x \in S,\ \ t \ge 0$ (1.9)

канагаттандырган (1.3) теңдемесинин чыгарылышын табыш керек.

Баштапкы шарттар берилген жана каралып жаткан четтик маселеге ылайык чек аралык шарттардын ичинен бири белгилүү деп болжолдонгон, анын үстүнө

$u^S \in C(S \times t),\ \ g \in C'(S \times t),\ \ C'$ – функциянын мына ушул көптүгүндөгү тилкелик-үзгүлтүксүздөр.

Эгер ал D^- цилиндриндеги (1.3) теңдемесин, төмөнкү негиздеги (1.9) баштапкы шарттарды, S – бул цилиндрдин капталдык бетиндеги чек аралык (1.10) же (1.11) шарттарды канагаттандырса жана кескин өзгөрүүлөрдүн шарттары (1.6) – (1.7) аткарылган толкундук фронттордун саны чектелүү болсо, $u(x,t) \in C^2(D^-) \cap C^1(D^- \cup D)$ функциясы (1.3) теңдемесинин *классикалык* чыгарылышы деп аталат.

Э с к е р т ү ү. Баштапкы-четтик маселелердин дифференциалдуу чыгарылыштарынын зарыл шарттары болуп жылмалык шарттар $G \in C(D^- \cup D)$, $u^0(x) \in C^1(S^- \cup S)$, $u^1(x) \in C(S^- \cup S)$ жана башталгыч жана чек аралык маалыматтардын (белгилерди) макулдашылган шарттары эсептелет. Эгер бул шарттар аткарылбаса, сокмо (урма) толкундар үчүн мүнөздүү толкундук фронттор пайда болот. Бул жерде ушул функциялардын регулярдуулугун гана жана $u^S(x,0) = u^0(x)$ макулдашуунун эки шартынын бирөөнү гана болжолдойбуз.

Энергиянын сакталуу закону. Баштапкы-четтик маселелердин жалгыз чыгарылышы.

*Т*өмөндөгү ички, кинетикалык жана толук энергиянын тыгыздыктары $\mathrm{W}(x,t) = 0{,}5 a_{ij}u,_i u,_j$, $\mathrm{K}(x,t) = 0{,}5\rho u,_t^2$, $\mathrm{E}(x,t) = \mathrm{K}(x,t) + \mathrm{W}(x,t)$ функцияларын, ошондой эле Лагранждын функциясын: $\mathrm{L}(x,t) = \mathrm{K}(x,t) - W(x,t)$ киргизебиз.

Эгер u – (1.3) классикалык чыгарылышы болсо, анда фронттордо

$$\left[\mathrm{E}(x,t)\right]_{F_t} = c^{-1} n_j \left[a_{ij}u,_i u,_t\right]_{F_t}$$

экени көрсөтүлгөн.

Эгер системага карата тышкы таасирлер болбосо, б.а. $G(x,t) = 0,\ g(x,t) = 0$, анда системанын толук энергиясы $\mathrm{E}(x,t)$ убакыт өткөн сайын өзгөрүлбөй тургандыгы далилденген:

$$\int_{S^-} \mathrm{E}(x,t)\,dV(x) = \int_{S^-} \mathrm{E}(x,0)\,dV(x)$$

Т е о р е м а 1.2. Эгер четтик маселенин классикалык чыгарылышы болсо, анда ал жалгыз гана чыгарылыш болот.

Гриндин формуласынын динамикалык аналогу. Бардык R^{N+1} мейкиндигинде аныкталган регулярдуу жалпыланган функцияларды киргизебиз:

$$\hat{u}(x,t)=u(x,t)H_D^-(x,t), \quad \hat{G}(x,t)=G(x)H_D^-(x,t)$$

бул жерде $u(x,t)$ – *четтик меселенин классикалык чыгарылышы,*
$H_D^-(x,t)=H_S^-(x)H(t)$ – $D^-(x,t)$ мейкиндик-убакыттык цилиндринин характеристикалык функциясы, $S^-[3]$ областынын характеристикалык функциясы:

$$H_S^-(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu\left(S^-\cap O_\varepsilon(x)\right)}{\mu\left(O_\varepsilon(x)\right)}$$

бул жерде $\mu(\cdot)$ – тиешелүү көптүктүн ченеми (аянт, көлөм), O_ε – $\varepsilon-$ x чекитинин айланасы: $O_\varepsilon(x)=\left\{y:\|y-x\|<\varepsilon\right\}$. Эгер S – чек арасынын областы тегиз (жылма) үзгүлтүксүз нормал менен берилген болсо, анда $x\in S$ үчүн $H_S^-(x)=1/2$. Хевисайддын функциясын $H(t)$ нөлдө деп аныктап бүтүрөбүз: $H(0)=1/2$.

(1.3) теңдемесинин фундаменталдык чыгарылышы – бул качан $G(x,t)$ теңдемесинин оң бөлүгү сингулярдык жалпыланган функциялар менен берилгенде. Физикалык жактан алар ар түрүү топтолгон булактардын таасири астындагы чөйрөнүн кыймылын билдирет. Фундаменталдык чыгарылыштардын арасында $\delta-$ Дирактын функциясы менен аныкталган, б.а. $G(x,t)=\delta(x,t)=\delta(x)\delta(t)$гы (1.3) чыгарылышында таралуунун (шоолалануунун) шарттарын канагаттандырган

$$a_{ij}u_{,ij}(x,t)-\rho u_{,tt}(x,t)=\delta(x)\delta(t),\ (x,t)\in R^{N+1}$$ болгон

Гриндин функциясы өзгөчө орунду ээлейт.

Бул жерде k – аныкталганда, $\delta(x,t)$ – жалпыланган δ – функциясы.

Гриндин функциясын түзүү үчүн матрицалык ыкма [31] колдонулган.
Убактысы боюнча Гриндин функциясынын эң алгачкы түрүн киргизебиз:

$$V(x,t)=U(x,t)*\delta(x)H(t)=U(x,t)\underset{t}{*}H(t), \quad \partial_t V(x,t)=U(x,t) \qquad (1.10)$$

Бул жерде $"\underset{t}{*}"$ белгиси t боюнча функциянын толук эмес түйүнүн түшүндүрөт. Ал регулярдуу функция үчүн төмөндөгүдөй жазылат:

$$f(x,t)\underset{t}{*}g(x,t)=H(t)\int_0^t f(x,t-\tau)g(x,\tau)d\tau$$

$V(x,t)$нын эң алгачкы түрү $G(x,t)=\delta(x)H(t)$ учурда (1.3) теңдемесинин чыгарылышы болуп эсептелет.

Т е о р е м а 1.3. Эгер $u(x,t)$ четтик маселеленин классикалык чыгарылышы болсо жана ал жалгыз болсо, анда $\hat{u}(x,t)$ жалпыланган чыгарылышын

$$\hat{u}(x,t) = U * G + U \underset{x}{*} u^1(x) H_S^-(x) + \left(U \underset{x}{*} u^0(x) H_S^-(x) \right),_t - \tag{1.11}$$

$$-U * g(x,t)\delta_S(x)H(t) - a_{ij}V,_j * u,_t n_i \delta_S(x)H(t) - a_{ij}V,_j \underset{x}{*} u^0(x) n_i \delta_S(x)$$

түрүндө элестетебиз.
Бул жерде $\delta_S(x)$ – сингулярдуу жалпыланган функция – S бетиндеги жөнөкөй катмар, ага жараша $g(x,t)\delta_S(x)H(t)$ – $D = S \times [0,\infty)$ цилиндринин каптал бетиндеги жөнөкөй катмар, $\delta(t)$ – Дирактын функциясы.

Н а т ы й ж а с ы. Бир тектүү ($u^m(x) = 0,\ m = 0{,}1$) баштапкы шарттарда чыгарылыш ылдамдыктын чек аралык маанилери жана $\partial u / \partial n$ нормалдуу туундулары менен аныкталат:

$$\hat{u}(x,t) = U * G - U * g(x,t)\delta_S(x)H(t) - a_{ij}V,_j * u,_t n_i \delta_S(x)H(t) \tag{1.12}$$

(1.11) жөнөкөй жана эки кабат катмардагы тыгыздык (1.7) берилген баштапкы шарттар жана (1.8),(1.9) чек аралык шарттар менен аныкталат, алардын бир бөлүгү чыгарылып жаткан четтик маселеден көз каранды жана белгилүү. Мына ошентип алынган формула белгилүү баштапкы жана чек аралык маанилери боюнча областтагы чыгарылышты калыбына келтирет, ошондуктан аны (1.3) теңдемесин чыгаруу учун Гриндин формуласынын аналогу деп атасак болот. Ал алдыга коюлган маселелердин жалпыланган чыгарылышы болуп эсептелет жана $\forall \hat{G}$ болгондо жана анын ичинде сингулярдык учурда да колдонулса болот, ал физикалык маселелер үчүн мүнөздүү.

Гаусстун формуласынын аналогу. (1.12) симметриясынын операторунун касиеттеринин жана δ – симметриясынын ара катыштарынын функциясын канагаттандырган, чыңалуунун тензорунун аналогу T чыңалуу функциясын жана анын W убактысы боюнча эң алгачкысын киргизебиз:

$$T(x,t,n) = a_{ij}U,_i n_j(x), \quad W(x,n,t) = T(x,n,t) \underset{t}{*} H(t) = a_{ij} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} n_j$$

Т е о р е м а 1.4. n белгиленген учурда мультиполдук типтеги топтолгон күчтөргө ылайык

$$G(x,t) = a_{ij} n_j \delta,_i(x)\delta(t)$$

$T(x,n,t)$ функциясы (1.3) теңдемесинин фундаменталдык чыгарылышы болот.

Лемма 1 (Гаусстун формуласынын динамикалык аналогу). $\mathrm{D}'(R^{N+1})$ болгон учурда:

$$-a_{ij}V,_i n_j \underset{x}{*} \delta_S(x) - \rho U,_t \underset{x}{*} H_S^-(x) = H_D^-(x,t)$$

Алынган Гриндин жана Гаусстун формуласынын динамикалык аналогдорун четтик маселелерди чыгарууда чек аралык интегралдык теңдемелерди түзүү үчүн колдонобуз.

(1.11) формуланы бир тектүү баштапкы шарттарда төмөндөгүдөй интегралдык түрдө (N *үчүн* $N=2$) формалдуу жазууга болот:

$$\hat{u}(x,t)=\int_{D^-}U(x-y,t)\hat{G}(y,t)dV(y,t)-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_S U(y-x,\tau)g(y,\tau)dS(y,\tau)-\int_0^t d\tau\int_S T(y-x,n(y),t-\tau)u(y,\tau)dS(y)+$$

$$+\int_{S^-}\left(U,_t(x-y,t)u^0(y)+U(x-y,t)u^1(y)\right)dV(y)$$

Фундаменталдык чыгарылыштардын өзгөчөлүктөрү четтик маселелердин чыгарылыштарын түзүү үчүн акыркы формуланы колдонууга мүмкүндүк бербейт, сингуляторлуулуктун себебинен U жана T интегралдары оң жагында жайгашпайт. Жогоруда киргизилген эң алгачкы матрицалар, маселенин өлчөмдөштүгүнүн түрүнөн көз каранды болгон, элестетүүгө боло турган формуланы (1.11) түзүүгө мүмкүндүк бербейт.

Үчүнчү главада Фурьенин жалпыланган өзгөртүп туюнтууларынын негизинде импульстук топтолгон булактардын таасири астындагы алардын динамикасын жазып көрсөткөн анизотроптук чөйрөлөрдүн динамикасынын теңдемесинин фундаменталдык чыгарылыштарын түзүү ыкмасы иштелип чыккан. Гуктун законун (1.2) эсепке алуу менен анизотроптук серпилгич чөйрөнүн кыймылынын теңдемеси бул түрдөгү гиперболалык теңдемелердин системасы түрүндө жазылат:

$$L_{ij}(\partial_x,\partial_t)u_j(x,t)+G_i(x,t)=0,\ \ (x,t)\in R^{N+1} \tag{2.1}$$

$$L_{ij}\left(\partial_x,\partial_t\right)=C_{ij}^{ml}\partial_m\partial_l-\rho\delta_{ij}\partial_t^2,\quad i,j,m,l=\overline{1,N}, \tag{2.2}$$

бул жерде $\delta_{ij}=\delta_i^j$ – Кронекердин белгиси, $\partial_x=(\partial_1,...,\partial_N)$, $\partial_t=\partial/\partial t$,

G массалык күчү – локалдык-интеграцияланууучу вектор-функция, C_{ij}^{ml} – чөйрөнүн серпилгич константалары, (1.1.) индекстерди которууга карата симметриянын жогоруда белгиленген касиеттерине ээ болгон жана так гиперболалуулуктун бул шарттарына жооп берген:

$$L_{ij}(\partial_x,\partial_t)u_j(x,t)+G_i(x,t)=0,\ \ (x,t)\in R^{N+1} \tag{2.1}$$

$$L_{ij}\left(\partial_x,\partial_t\right)=C_{ij}^{ml}\partial_m\partial_l-\rho\delta_{ij}\partial_t^2,\quad i,j,m,l=\overline{1,N}, \tag{2.2}$$

(1.1) индекстеринин орун алмашуусуна жараша берилген касиеттерге ээ болгон жана

$$W(n,v)=C_{ij}^{ml}n_m n_l v^i v^j>0\quad \forall n\neq 0,\quad v\neq 0 \quad (2.3)$$

C_{ij}^{ml} – чөйрөнүн серпилгич константалары бул жерде $n=(n_1,...,n_N)$, $\nu=(\nu_1,...,\nu_N)$. W оң белгилүүлүгүнө карата (2.1) системасынын характеристикалык теңдемеси төмөндөгүдөй жазылат:

$$\det\{C_{ij}^{ml}n_m n_l-\rho c^2\delta_{ij}\}=0, \qquad (2.4)$$

$2N$ (бир санга калдыксыз бөлүнүүчүлүктү эсепке алуу менен) анык тамырга ээ:

$$c=\pm c_k(n),\ \ 0<c_k\le c_{k+1},\ \ k=\overline{1,N-1}$$

Алар (2.1) системасынын гармоникалык анализи учурунда фазалык ылдамдыктардын маанисине ээ жана жалпы жагдайда толкундун таралуу багытынан көз каранды.

Каралып жаткан чөйрөлөрдүн туташтыгына байланыштуу F_t толкундук фронттордо которуунун үзгүлтүксүздүк шарттары толкундук фронт аркылуу өтүүдө аткарылат:

$$[u_i(x,t)]_{F_t}=0,\ \ i=\overline{1,N} \qquad (2.5)$$

(2.5) натыйжасы толкун фронтундагы которуунун жанымa туундусунун үзгүлтүксүз шарттары болот:

$$[u_{i,t}n_l+cu_{i,l}]_{F_t}=0,\ \ i,l=\overline{1,N} \qquad (2.6)$$

бул жерде $c-$ толкундук фронттун кыймылынын ылдамдыгы, $n(x,t)=(n_1,...,n_N)$ – толкундук фронттун таралуу жагына багытталган F_t бетине карата нормалдын бирдик вектору. Күчтөрдүн импульс законун жана кыймылдын санын өзгөртүүнү колдонуу – толкундук фронттордогу которулуу талаасы үчүн биргелешкендиктин динамикалык шарттарын аткарууга алып келет:

$$[\sigma_i^l n_l+\rho cu_{i,t}]_{F_t}=0,\ \ i,l=\overline{1,N} \qquad (2.7)$$

(2.7) шарты толкун фронтундагы ылдамдыктын кескин өзгөрүүсүн чыңалуунун кескин өзгөрүүсү менен байланыштырат. Ошондуктан мындай бетти сокмо толкундун фронту деп аташат. Болжолдоштургандай, толкундук фронттордун саны жана албетте, ар бир фронт дээрлик бардык жерде $N-1$ өлчөмдөштүгүндөгү Ляпуновдун бети болот.

$\hat f(x,t)=(\hat f_1,...,\hat f_N)$ жалпыланган вектор-функция мейкиндигин $D'(R^{N+1})$ аркылуу белгилесек, $D(R^{N+1})$ мейкиндигинде аныкталган финиттик чексиз дифференцияланууучу вектор-функциясы $\varphi(x,t)=(\varphi_1,...,\varphi_N)$.

А н ы к т а м а. $\hat u(x,t)\in D'(R^{N+1})$ функциясы (2.1) теңдеменин системасынын *жалпыланган чыгарылышы* деп аталат, эгер

$\left(L\hat{u},\varphi\right)\equiv\left(\hat{u},L\varphi\right)=\left(G,\varphi\right) \quad \forall\varphi\in \mathrm{D}(R^{N+1})$ барабардыгы туура болсо.

Регулярдуу жалпыланган функция катары каралып жаткан $u(x,t)$ чыгарылышты $\hat{u}(x,t)=u(x,t)$ аркылуу белгилейбиз. Аналогиялык түрдө $\hat{G}(x,t)=G(x,t)$

Т е о р е м а 2.1. Эгер $u(x,t)$ функциясы – (2.1) теңдемесинин классикалык чыгарылышы болсо, анда $\hat{u}(x,t)$ – (2.1) системасынын жалпыланган чыгарылышы.

Фундаменталдык чыгарылыштар. Гриндин тензорун түзүүдө адатынча аны сүрөттөп көрсөтүү үчүн дифференциалдык теңдемелерден сызыктуу алгебралык теңдемелерге өтүүгө мүмкүн болгон интегралдык кайра түзүп куруулардын аппараты (Фурье-Лаплас) колдонулат. Акыркыларын чечмелеп жатып, өзгөрмө интегралдык өзгөртүп туюнтуудан изделген функциянын трансформантын бөлчөктүк-рационалдык функция түрүндө аныктайт, андан кийин түп нускасын калыбына келтирет. Көпчүлүк убакта Фурьенин тескери интегралдык өзгөртүп туюнтуусун колдонуу мүмкүн болбой калат. Бул Фурьенин жалпыланган интегралдык өзгөртүп туюнтуу аппаратын колдонууга алып келет.

Дифференциалдык теңдемелердин фундаменталдык чыгарылышы бир тектүү теңдемени чыгарууга чейинки тактык менен аныкталат. Ошондуктан алынган Фурьенин трансформантасы фундаменталдык чыгарылыштардын бүтүн классын аныктайт. Математикалык жактан бул Фурьенин анык өзгөрмө маанилериндеги интеграцияланбоочу өзгөчөлүктөрдүн болгонунан көрүнөт. Ошондуктан шоолалануунун шарттарын эсепке алуу менен трансформанттын белгилүү регляризациясын түзүү зарыл.

(2.1) теңдемелер системасын $\mathrm{D}'(R^{N+1})$ жалпыланган функция мейкиндигинде карап чыгабыз. (2.1) системасынын $U_{jk}(x,t)$ Грин матрицасы болуп анын $\hat{G}(x,t)=\delta_{ik}\delta(x,t)$ болгондогу $\mathrm{D}'(R^{N+1})$ чыккан,

$$U_{jk}(x,0)=0 \quad \text{при} \quad x\neq 0 \tag{2.9}$$

$$U_{jk}(x,t)=0 \quad \text{при } \ t<0, \quad |x|>c_{\max}t \tag{2.10}$$

шарттарын канагаттандырган:

$$C_{ij}^{ml}U_{j}^{k}{}_{,ml}(x,t)+\delta_{ik}\delta(x,t)=0, \quad i,j,k=\overline{1,N} \tag{2.8}$$

чыгарылышы эсептелет.

Т е о р е м а 2.2 Эгер c_q $\left(q=\overline{1,N}\right)$ (2.4) теңдемесинин жөнөкөй тамыры болсо, анда

$$U_{jk}(x,t)=\frac{(N-2)!}{(2\pi i)^N}H(t)\sum_{q=1}^{M}\int_{\|e\|=1}A_{jk}(e,c_q)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\left((e,x)+c_q(e)t-i0\right)^{N-1}}-\frac{1}{\left((e,x)-c_q(e)t-i0\right)^{N-1}}\right\}dS(e)$$

бул жерде $A_{jk}\left(e,c_q\right)=\dfrac{Q_{jk}\left(e,c_q\right)}{2c_q\,Q_{mm}\left(e,c_q\right)}$, $H(t)$ – Хевисайддын функциясы.

Т е о р е м а 2.3 Эгер $c_q\ \left(q=\overline{1,N}\right)$ – m_q бир санга калдыксыз бөлүнүүчүнүн теңдемесинин (2.4) тамыры болсо, анда

$$U_{jk}=\frac{(N-2)!}{(2\pi i)^N}H(t)\sum_q m_q\int_{R^N}\frac{Q_{jk,\omega}^{(m_q-1)}\left(e,c_q\right)}{\left(Q_{,\omega}^{(m_q)}\left(e,c_q\right)\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\left((e,x)+c_q(e)t-i0\right)^{N-1}}-\frac{1}{\left((e,x)-c_q(e)t-i0\right)^{N-1}}\right\}dS(e)$$

бул жерде кашаалардын ичиндеги жогорку индекс ω боюнча туундунун катарын билдирет.

Мына ошентип, Гриндин матрицасын түзүү бирдик сферасы боюнча интегралдарды эсептеп чыгууга алып келет. N жуп эместер үчүн бул теоремалар бир гана ε – Гриндин матрицасын жакындатууну түзүүгө мүмкүндүк берет. N жуптар үчүн ε – жакындатууну аныктоо үчүн бирдик сферасы боюнча көп өлчөмдүү (көп ченемдүү) беттик интегралды интеграциялоо керек. Бирок бир катар учурларда бул процедура жөнөкөйлөтүлүшү мүмкүн. Эгер оригинал Q^{-1} белгилүү болду десек,

$$J(x,t)=F^{-1}\left[\frac{1}{Q(i\xi,i\omega)}\right]$$

(2.9) шарттарын эсепке алуу менен түзүлсө, анда Гриндин матрицасы –

$$U_{jk}(x,t)=-Q_{jk}\left(\partial_x,\partial_t\right)J(x,t) \qquad (2.13)$$

оңой эле калыбына келет.

(2.1) теңдеменин инварианттуулугунда, ортогоналдык өзгөртүп туюнтуулар тобуна салыштырмалуу L_{ij} оператордун символу $\|\xi\|$, ω эки өзгөрмөнүн функциясы жана

$$Q(i\xi,i\omega)=(i\omega)^{2N}\,Q\left(\|\xi\|\,\omega^{-1}\right) \qquad (2.14)$$

түрүндө гана берилет.

Жалпак деформация жагдайында Гриндин тензору бөлчөктүк-рационалдык функциялардын кармап калынган суммасын түзөт [5]:

$$U_j^k(x,t)=\frac{1}{\pi t}\operatorname{Im}\sum_{\substack{q=1\\ \operatorname{Im}\zeta_q>0}}^{2}\frac{Q_{jk}\left(\zeta_q,1,(x_1\zeta_q+x_2)/t\right)}{Q,_{\zeta}\left(\zeta_q,1,(x_1\zeta_q+x_2)/t\right)}$$

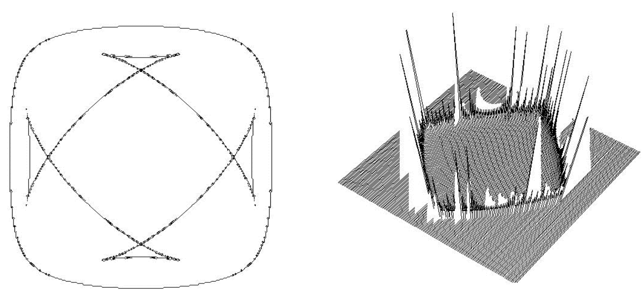
где $Q_{jj}(\cdot)=-L_{kk}(\cdot)$, $Q_{jk}(\cdot)=L_{jk}(\cdot)$ $j\neq k$ или $Q_{11}(\xi_1,\xi_2,\omega)=C_{66}\xi_1^2+C_{22}\xi_2^2+\rho\omega^2$,

$Q_{12}(\xi_1,\ \xi_2,\ \omega)=-\left(C_{12}+C_{66}\right)\xi_1\xi_2$, $Q_{22}(\xi_1,\ \xi_2,\ \omega)=C_{11}\xi_1^2+C_{66}\xi_2^2+\rho\omega^2$, ζ_q–

теңдеменин тамыры $Q\left(\zeta,1,x_1\zeta+x_2\right)=0$, $Q=Q_{11}Q_{22}-Q_{12}^2$.

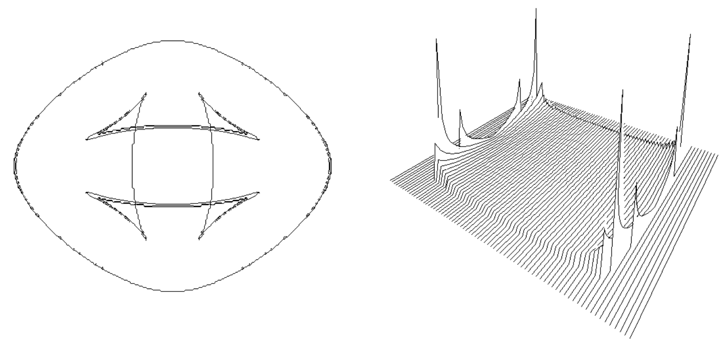
Бул иште серпилгич касиетке ээ болгон начар жана күчтүү анизотропиялуу чөйрөнүн анизотроптук модели каралган. Биринчи жайгдайда толкундук фронттордун топологиялык типтери кеңейүүчү сфераларга окшош. Экинчи жагдайда убакыттын өтүшү менен кеңейүүчү жана толкундук фронттор менен чектелген кыймылдуу дүүлүкпөгөн областтар – татаал толкундук фронттор жана лакундар пайда болот.

Лакундар – фундаменталдык чыгарылыштары нөлгө айланган (күчтүү лакундар) толкундук фронттун бетине карата кошумча компоненттер. Мындай чөйрө максималдуу ылдамдык векторунун багытындагы кескин көрүнүп турган толкундук касиеттерге ээ.



а) б)

1-сүрөт. Топаз үчүн топтолгон күчтөрдүн аракети астындагы толкундук фронттордун (а) жана которуу амплитудаларынын (б) сүрөтү.



а) б)

2-сүрөт. Калий-пентабораты үчүн топтолгон күчтөрдүн аракети астындагы толкундук фронттордун (а) жана которуу амплитудаларынын (б) сүрөтү.

Сандык эсептөөлөрдүн жыйынтыктары көрсөткөндөй, серпилгич касиетеги начар анизотропиялуу чөйрөлөрдө толкундардын таралуу сүрөтү изотроптук чөйрөдөгү толкундардын таралуу сүрөтүнө окшош, бирок жылма эки учу бириккен сызыктарды элестеткен толкундардын фронттору борборлош айланалардан бир канча айырмаланып турат. Серпилгич касиеттеги күчтүү анизотропиялуу чөйрөлөрдө лакундар пайда болот. Мындай областтардын координаттары $\operatorname{Im}\zeta_q(x_1,x_2,t)=0,\ q=1,2$ шарттарын канагаттандырат.

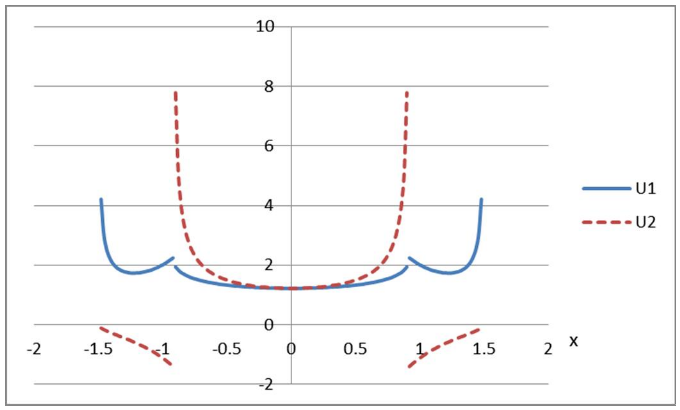
Бул кубулуш катуулук басымдуулук кылуучу багыттарда кескин көрүнгөн жана катуулук аз жерде начарлаган күчтүү анизотроптук чөйрөнүн толкундук касиеттери менен байланыштуу. Маселен, күчтүү анизотроптук чөйрө деп эсептелген цинк, топаз жана калий-пентаборат ортотроптору үчүн лакундар (үч бурчтук областтар менен тартылган) болот. Лакундардын жайгашышы ар түрдүү: топаз үчүн – ортотропиянын эки огунда (1-сүр.), калий-пентаборат үчүн – ортотропиянын окторунун ортосунда (2-сүр.).

Бул чөйрөлөр үчүн квазиузаталуу толкундун областы толкундун тышкы фронтунун жана ички фронтунун бөлүктөрү менен чектелген, кайтаруу чекиттерин өз ара жана түйүндүк чекиттер менен да бириктирген беш байланыштуу областты элестетет. Тилкелик-жылма сызыктарды түзгөн толкундун ички фронтунун бул участоктору квазиузаталуу толкундун ички фронттору болуп эсептелет.Толкундун квазитуурасынын фронту тилкелик-жылма ийри сызыгынан турат.

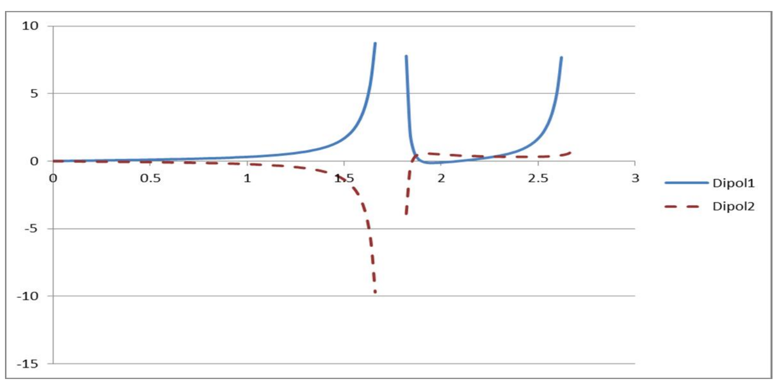
Жер титирөөлөрдүн борборунан таралган толкундардын таралуу процесстерин изилдөө $G_k(x,t)$ бөлүштүрүлгөн массалык күчтүн таасири астындагы чөйрөнүн чыңалган-деформацияланууучу абалын изилдөөгө байланыштуу. Регулярдуу массалык күчтөр үчүн которуу талаасынын компоненттеринин төмөндөгүдөй интегралдык түрдө элестетүүгө болот:

$$u_i(x,t)=\int_0^{\infty}d\tau\int_{R^3}U_{ik}(x-y,t-\tau)G_k(y,\tau)dV(y).$$

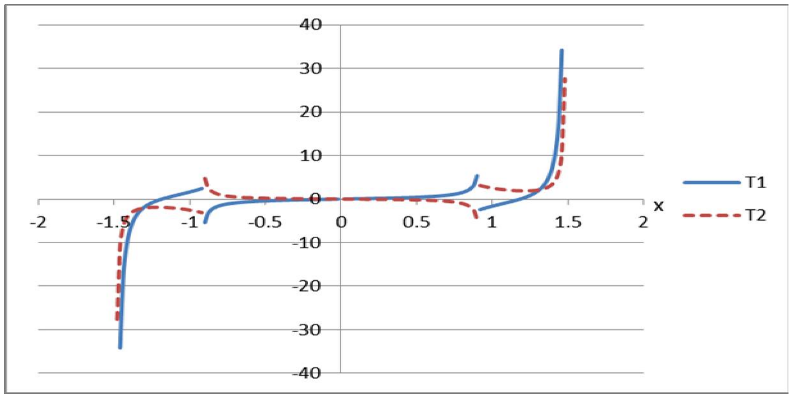
Анын өзүнүн өлчөмүнөн ага чейинки аралык бир топ жогору болгон жер титирөөнүн алыстатылган борбору үчүн чекиттик алып жүрүүчүсү (поль, диполь, мультиполь ж.б.) менен болгон сингулярдык жалпыланган функциялар түрүндөгү топтолгон булактардын модели колдонулат. Аны менен бирге которуу талаасы төмөндөгү түйүн түрүндө берилет $,U_{jk}(x,t)$ ага тиешелүү $G_k(x,t)$: $u_j(x,t) = U_j^k(x,t) * G_k(x,t), \quad j,k=\overline{1,3}$, аны жалпыланган функциялар теориясында түйүндөрдү аныктоо эрежелери боюнча алыш керек. Диполдун аракети астындагы топаз үчүн Грин тензорунун эсептөөлөрүнүн жыйынтыктары берилген.



3-сүрөт. t= 1,5 болгон учурдагы топтолгон күчтөрдүн жана учурлардын аракети астындагы алевролит үчүн Грин тензорунун компоненттери



4-сүр. Диполдун аракети астындагы топаз үчүн Грин тензорунун компоненттери



5-сүр. t= 1,5 болгон учурдагы топтолгон күчтөрдүн аракети астындагы алевролит үчүн фундаменталдык чыңалуулардын тензорунун компоненттери

Эсептөөлөр көрсөтүп жаткандай, импульстук булактардын аракети астындагы толкундук фронттордогу топаз үчүн котоpуулар үзүлүүгө кабылат. Лакундар координаттык октордо жайгашкан. Эки фронттогу кескин өзгөрүүлөр экөө тең которуунун түзүүчүлөрүнө кабылышат. Лакунага туура келген участоктордо котоpуулар жокко эсе.

Убакыт боюнча жана мейкиндик боюнча бөлүштүрүлгөн эркин нагрузкалардын аракети астындагы каралып жаткан чөйрөлөрдүн чыңалган-деформацияланган абалын Гриндин тензору изилдөөгө мүмкүндүк берет.

Үчүнчү главада серпилгич анизотроптук чөйрөлөрдүн динамикасынын стационардык эмес четтик маселелери каралып өткөн. Баштапкы-четтик маселелердин берилиши коюлуп, четтик маселелер бир чыгарылышка ээ болоору далилденген. Жалпыланган функциялардын теориясынын негизинде сокмо толкундардын фронтторундагы шарттарды түзүү ыкмалары иштелип чыккан. Серпилгич анизотроптук чөйрөлөр үчүн стационардык эмес четтик маселелердин жалпыланган чыгарылыштары түзүлгөн. Сомильян, Гаусстун мейкиндиктеги жалпыланган функциялардын формулаларынын стационардык эмес аналогдору түзүлгөн. Жалпак деформация учурундагы чыгарылыштардын регулярдуу интегралдык элестетүүлөрү жана баштапкы-четтик маселелердин сингулярдык чек аралык интегралдык теңдемелери берилген.

Баштапкы-четтик маселелердин берилиши. Фронттордогу шарттар. Каралып жаткан чөйрө $S^{-}\in R^{N}$ областын ээлеп, S бетине карата тышкы нормалы $n=(n_1,...,n_N)$ $(\|n\|=1)$ болгон Ляпунов беттер классынан учу бириккен тегиз S бети менен чектелген десек:

$$\|n(x_2)-n(x_1)\|=O(\|x_2-x_1\|),\ \ x_1,x_2\in S\,.$$

$D^- = S^- \times [0,\infty)$ – аркылуу мейкиндик-убакыттык цилиндрди белгилейбиз: $(x,t) \in D^-$, $D = S \times [0,\infty)$ – бул цилиндрдин бети, $D_t^- = S^- \times [0,t]$, $D_t = S \times [0,t]$. Бул жерде төмөндөгү четтик маселелер каралат.

Баштапкы-четтик маселе I. Берилген баштапкы которуулардагы жана ылдамдыктардагы

$$u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad x \in S^- \cup S, \quad u_{i,t}(x,0) = u_i^1(x), \quad x \in S^-, \tag{3.1}$$

жана чек аралардагы берилген которуулардагы:

$$u_i(x,t) = u_i^S(x,t), \quad x \in S, \quad t \geq 0 \tag{3.2}$$

ошондой эле сокмо толкундар фронтторундагы (2.5) – (2.7) (2.1) кыймылынын теңдемелер системасынын чыгарылышын табуу.

Баштапкы-четтик маселе II. Чек аралардагы берилген чыңалуулар учурундагы

$$\sigma_i^l(x,t) n_l(x) = g_i(x,t), \quad x \in S, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1,N} \tag{3.3}$$

баштапкы шарттарды (3.1), (3.2) жана фронттордогу шарттарды (2.5) (2.7) канагаттандырган кыймылдын теңдемелеринин (2.1) системасынын чыгарылышын табуу.

Которуулардын баштапкы $u_i^0(x)$ жана $u_i^s(x,t)$ чек аралык функциялары үзгүлтүксүз, баштапкы ылдамдык $u_i^1(x)$ жана $g_i(x,t)$ – чек аралык нагрузкалар – тилкелик-үзгүлтүксүз функциялар деп болжолдонгон. Чыгарылыштын үзгүлтүксүздүгү жана дифференциялуулугу үчүн баштапкы жана чек аралык маанилердин макулдашуу шарты зарыл:

$$u_i^s(x,0) = u_i^0(x), \quad u_{i,t}^s(x,0) = u_i^1(x), \quad x \in S \tag{3.4}$$

Биринчи шарты чөйрөнүн туташтыгы үчүн зарыл. Тышкы таасирлер (күчтөр) сокмо мүнөзгө ээ болгон учурда жана үзүлгөн же сингулятордук функциялар менен көрсөтүлгөн учурда, физикалык маселелер үчүн типтүү болгон ылдамдыктар боюнча макулдашуунун экинчи шарты аткарылбайт. Мына ушундай жагдайга учураган толкундук фронттор чөйрөсүндө которуунун туундулары кескин өзгөрүүлөргө кабылышы мүмкүн. Тышкы таасирлер (күчтөр) сокмо мүнөзгө ээ болгон учурда жана үзүлүү же сингулярдык функциялар менен берилгенде, ылдамдыктар боюнча макулдашуу шарттарынын экинчиси (3.4) аткарылбашы мүмкүн, ал физикалык маселелер үчүн типтүү деп эсептелет. Мына ушундай чөйрөлөрдө пайда болгон толкун фронттордо которуулардын туундулары кескин өзгөрүүлөргө кабылышы мүмкүн.

Энергиянын сакталуу закону алынган, биринчи (экинчи) четтик маселенин бир эле чыгарылышы бар экени далилденген.

Сомильяндын формуласынын динамикалык аналогу.

Гриндин матрицасы $U_j^k(x,t)$– теңдеменин чыгарылышы (2.1) болсун. Гриндин матрицасынын убакыт боюнча эң алгачкы түрүн киргизебиз.:

$$V_j^k(x,t) = U_j^k(x,t) \underset{t}{*} H(t) \quad \Rightarrow \quad \partial_t V_j^k(x,t) = U_j^k(x,t) \tag{3.5}$$

Т е о р е м а 3.1. Эгер $u(x,t)$ биринчи (экинчи) четтик маселенин чыгарылышы болуп жана ал бирөө эле болсо, анда $\hat{u}(x,t)$жалпыланган чыгарылышы төмөндөгү түйүн түрүндө көрсөтүлөт:

$$\hat{u}_i(x,t) = U_i^k(x,t) \underset{x}{*} 2\rho u_k^1(x)\, H_S^-(x) +$$
$$+\rho\left(\partial_t U_j^k(x,t) \underset{x}{*} u_k^0(x) H_S^-(x)\right) + U_j^k(x,t) * g_k(x,t)\delta_S(x)H(t) + \tag{3.6}$$
$$+C_{kj}^{ml}\partial_t V_j^k(x,t) * u_{j,t}(x,t) n_m(x)\delta_S(x)H(t) + C_{kj}^{ml}\partial_l V_j^k(x,t) \underset{x}{*} u_j^0(x) n_m(x)\delta_S(x)$$

Бул формуланы интегралдык түрдө жазуу үчүн жана анын негизинде баштапкы-четтик маселелерди чыгаруунун чек аралык интегралдык теңдемелери үчүн ага кирген функицоналдык матрицалардын касиеттери каралып чыккан. Гриндин матрицасын $U_j^k(x,t)$колдонуу менен S, T фундаменталдык матрицаларын киргизебиз, алардын элементтери төмөндөгү барабардык менен аныкталат:

$$S_{ik}^m(x,t) = C_{ij}^{ml} U_{j,l}^k(x,t), \quad \Gamma_i^k(x,t,n) = S_{ik}^m(x,t) n_m(x) \tag{3.7}$$

$$T_k^i(x,t,n) = -\Gamma_i^k(x,t,n) = -C_{ij}^{ml} n_m(x) U_{j,l}^k(x,t), \quad i,j,k,m,l = \overline{1,N} \tag{3.8}$$

$U_j^k(x,t)$ теңдемеси үчүн теңдемени (2.8) мындай түрдө жазууга болот

$$S_{ik,l}^m(x,t) - \rho U_{i,tt}^k(x,t) + \delta_i^k \delta(x)\delta(t) = 0 \tag{3.9}$$

Киргизилген матрицалар симметриянын касиеттеринет ээ, алар $U_j^k(x,t)$ үчүн (3.9) теңдемесинин инварианттуулугунун натыжасы болуп эсептелет, $y=-x$ симметриясынын өзгөртүп туюндуруусуна салыштырмалуу.

Т е о р е м а 3.2. k фиксацияланганда $T_i^k(x,t,n)$ матрицасы

$$G_i(x,t) = C_{ik}^{ml} n_m(x) \delta_{,l}(x)\delta(t)$$

туура келген (2.1) теңдемелер системасынын фундаменталдык чыгарылышы болот.

$T_i^k(x,t,n)$ матрицасын *мультиполдук матрица деп атасак, ал* (2.1) системасынын фундаменталдык чыгарылыштарын түшүндүрүп бергендиктен, мультиполдук типтеги топтолгон булактардын аркасы менен пайда болгон.

(3.6) чыгарылышынын регулярдуу элестетүүлөрүн түзүү үчүн, V_i^k менен катар матрицаны киргизебиз

$$W_j^k(x,t,n) = T_j^m(x,t,n) * \delta_{mk}\delta(x)H(t) = T_j^k(x,t,n) \underset{t}{*} H(t), \tag{3.10}$$

ал убакыт боюнча мульполдук матрицанын эң биринчи түрү болуп эсептелет:

$$\partial_t W_j^k(x,t) = T_j^k(x,t) \tag{3.11}$$

Бул V_i^k и W_i^k теңдемелер системасынын фундаменталдык чыгарылыштары экени түшүнүктүү:

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t) V_j^k(x,t) + \delta_i^k \delta(x) H(t) = 0$$

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t) W_j^k(x,t) + C_{ki}^{ml}\, n_m(x) \delta,_l(x) H(t) = 0$$

V_i^k жана W_i^k ошондой эле симметриянын касиеттерине ээ.

$U_i^{k(s)}(x)$ – статистикалык теңдемелердин Грин матрицасын киргизебиз:

$$L_{ij}(\partial_x, 0) U_j^{k(s)}(x) + \delta_{ik}\delta(x) = 0, \quad U_j^{k(s)}(x) \to 0 \ \ \|x\| \to \infty \tag{3.12}$$

ошондой эле

$T_i^{k(s)}(x,n) = -C_{kj}^{ml}\, n_m(x)\, \partial_l U_j^{i(s)}$ матрицасын, (3.8) аналогиялуу түрдө:

Төмөндөгү симметриялардын ара катыштары туура экени айкын болуп турат

$$T_i^{k(s)}(x,n) = -T_i^{k(s)}(-x,n) = -T_i^{k(s)}(x,-n)$$

Н а т ы й ж а. $T_i^{k(s)}$ статиканын теңдемелеринин фундаменталдык чыгарылышы болуп эспетелет:

$$L_{ij}(\partial_x, 0) \mathrm{T}_j^{k(s)}(x,n) - n_m(x) C_{ik}^{ml}\, \delta,_l(x) = 0$$

Т е о р е м а 3.3. Төмөндө:

$$V_i^k(x,t) = U_i^{k(s)}(x) H(t) + V_i^{k(d)}(x,t)$$

$$W_i^k(x,t) = T_i^{k(s)}(x) H(t) + W_i^{k(d)}(x,t),$$

бул жерде $U_i^{k(s)}(x)H(t)$, $T_i^{k(s)}H(t)$ – $x \neq 0$ болгондогу регулярдуу функциялар.

$\|x\| \to 0$ болгондо

$$U_i^{k(s)}(x) \approx \ln\|x\| A_{ik}^N(e_x), \quad T_i^{k(s)} \approx \|x\|^{-1} B_{ik}^N(e_x), \quad N = 2$$

$$U_i^{k(s)}(x) \approx \|x\|^{-N+2} A_{ik}^N(e_x), \quad T_i^{k(s)} \approx \|x\|^{-N+1} B_{ik}^N(e_x), \quad N>2$$

Бул жерде $e_x = x/\|x\|$, $A_{ik}^N(e_x)$, $B_{ik}^N(e_x)$ – сферадагы үзгүлтүксүз жана чектелген функциялар $\|e\|=1$; $V_i^{k(d)}$, $W_i^{k(d)}$ – регулярдуу функциялар, $x=0,\ t>0$ болгондо үзгүлтүксүз . N каалагандай болгондо:

$$V_i^{k(d)}(x,t)=0 \text{ жана } W_i^{k(d)}(x,t)=0 \text{ болгондо } \|x\| > \max_{\|e\|=1} c_k(e)t,$$

Ал эми так эмес N так эместе барабардыктар туура жана $\|x\| < \min_{\|e\|=1} c_k(e)t$ болгон учурда да туура.

Гausстун формуласынын динамикалык аналогу. Чек аралык интегралдык стационардык эмес чектүү маселелер.

Лемма 3.1 (Гаусстун формуласынын аналогу). Эгер $S - R^N$ бир учу экинчи учу менен бириктирилген эркин алынган Ляпуновдун бети болгон учурда

$$\int_S T_i^{k(s)}(y-x, n(y))\,dS(y) = \delta_k^i H_S^-(x)$$

$x \in S$ болгондо сингулярдын интегралы башкы маани катары алынат.

Теорема 3.6. $x \in S,\ t>0$ үчүн биринчи (экинчи) баштапкы-четтик маселенин классикалык чыгарылышы төмөндө берилген синуглярдык чек аралык интегралдык теңдемелердин түрүн канагаттандырат.

$$0.5u_k(x,t) = U_k^i(x,t) * G_i(x,t) + U_k^i(x,t) * g_i(x,t)\ \delta_s(x) H(t) -$$

$$-V.P.\int_S T_k^{i(s)}(x-y,n)\, u_i(y,t)\,dS(y) - \int_S dS(y) \int_0^t W_k^{i(d)}(x-y,n,t-\tau) u_{i,t}(y,\tau)\,d\tau -$$

$$-\int_S W_k^{i(d)}(x-y,n,t)\, u_i^0(y)\,dS(y) + \left(U_k^i(x,t) \underset{x}{*} u_i^0(x) H_S^-(x)\right)_{,t} + U_k^i(x,t) \underset{x}{*} u_i^1(x) H_S^-(x)$$

Бул теңдемелер баштапкы-четтик маселеге тиешелүү белгисиз чек аралык функцияларды аныктоого мүмкүндүк берет. Аларды аныктагандан кийин теореманын формулалары аныктоонун обалстынын ичиндеги чыгарылыштарды аныктайт.

Алынган СГИУдын чечилиш маселеси функциялардын белгилүү классында функционалдык анализдин өз алдынча маселеси болуп эсептелет.

Чек аралык элементтерди колдонуу ыкмасы менен бирге бул теңдемелердин сандык чыгарылыштарын ишке толугу менен ашырууга мүмкүн. Серпилгич теориясынын стационардык эмес четтик маселелери үчүн СГИУнун чыгарылыштарынын мындай жеке учурлары менен [3,9,13,29,35,48] бул иштерден таанышып чыгууга болот.

Төртүнчү главада серпилгич анизотроптук чөйрөлөр үчүн стационардык четтик маселелер каралып чыккан. Стационардык термелүүлөр учурунда анизотроптук чөйрөлөрдөгү четтик маселелерди чыгаруу үчүн Сомильяндын, Гаусстун жалпыланган формулалары жана сингулярдык чек аралык интегралдык теңдемелери (СГИУ) түзүлгөн.

Стационардык термелүү маселелерин коюу. Комплекстүү амплитудалар үчүн серпилгич анизотроптук чөйрөлөрдүн кыймылынын теңдемеси

$$L_{ij}(\partial_x,-i\omega)u_j(x)+G_i(x)=0, \qquad (4.1)$$

$$L_{ij}(\partial_x,-i\omega)=C_{ij}^{ml}\partial_m\partial_l+\delta_{ij}\rho\omega^2, \quad i,j,m,l=\overline{1,N},$$

түрүндөгү теңдемелер системасына алып келинген.

Четтик маселе I. Эгер S болгон которулуштар белгилүү болсо:

$$u_i(x)=u_i^S(x), \quad x\in S$$

(4.1) чыгарылышын табуу.

Четтик маселе II. Эгер S болгон чыңалуулар белгилүү болсо, (4.1) чыгарылышын табыш керек.

Комплекстүү амплитудалар үчүн чек аралык шарттар берилген. Стационардык маселелер коюлган учурда баштапкы шарттар берилбейт. S^-тин чектелбеген областы (тышкы маселе) кырдаалында жалгыз чыгарылышты бөлүп чыгаруу (ажыратуу) үчүн Зоммерфельддин шоолалануусунун шарттары сыяктуу шарттар берилет.

$u\in C^2(S^-)\bigcup C(S^-\bigcup S)$, $G\in C(S^-\bigcup S)$ деп божомолдонот.

Сомильяндын формулаларынын стационардык аналогдору.

Т е о р е м а. 4.1. Эгер берилген ω да $u(x)$ биринчи (экинчи) четтик маселенин классикалык чыгарылышы болсо жана ал бирөө гана болсо, анда $\hat{u}(x)$ түйүн түрүндө берилет:

$$\hat{u}_i(x)=-U_i^k*\hat{G}_k+U_i^k*g_k\delta_S(x)-C_{kj}^{ml}U_{i,l}^k*u_jn_m\delta_S(x) \qquad (4.2)$$

жана (4.1) жалпыланган чыгарылыш болуп эсептелет.

Стационардык четтик маселелердин чек аралык интегралдык теңдемелери.

Т е о р е м а. 4.2. k *жана* n *аныкталган учурда* $T_i^k(x,n)$*матрицасы мультиполдук типтеги чогулган булактарга туура келүүчү*

$$G_i(x)=n_mC_{il}^{km}\delta,_l(x)$$

(4.1) системанын фундаменталдык чыгарылышы болот.

Т е о р е м а. 4.3 (Гаусстун формуласынын аналогу) . *S – Ляпуновдун R^N эрки менен*

алынган бир учу экинчи учу менен бириктирилген бети болсо,анда

$$V.p.\int_S T_i^k(x,y,n(y))dS(y) = \rho\omega^2 \int_{S^-} U_k^i(x,y)dV(y) + \delta_{ki} H_S^-(x) \qquad (4.3)$$

$x \in S$ учурунда сингулярдык интеграл башкы маани катарында алынат.

(4.2) формуласы кийинки интегралдык түрдө берилиши мүмкүн

$$\hat{u}_i(x) = \int_{S^-} U_k^i(y,x)\hat{G}_i(y)dV(y) + \qquad (4.4)$$

$$+\int_S U_i^k(y,x)g_k(y)dS(y) - \int_S T_i^k(y,x,n(y))u_k(y)dS(y)$$

$x \notin S$ $U_i^k(x)$ үчүн $T_i^k(x,n)$ – регулярдуу функциялар. Чек аралык чекиттер үчүн мына бул асимптотиктер [40] боло алат:

$$U_i^k(x) \sim \ln\|x\| A_{ik}^N(e_x), \quad T_i^k(x,n) \sim \|x\|^{-1} B_{ik}^N(e_x) \qquad N=2 \text{ болгондо}$$

$$U_i^k(x) \sim \|x\|^{-N+2} A_{ik}^N(e_x), \quad T_i^k(x,n) \sim \|x\|^{-N+1} B_{ik}^N(e_x) \qquad N>2 \text{ болгондо}$$

бул жерде $e_x = x/\|x\|$, $A_{ik}^N(e_x)$, $B_{ik}^N(e_x)$ – сферасындагы үзгүлтүксүз жана чектелген $\|e\| = 1$функциялары, ошондуктан биринчи бөлүктөгү (4.4) акыркы кошулуучулар сингулярдык болот.

(4.4) ара катыштары эллиптикалык система үчүн Сомильяндын жалпыланган формуласы болуп эсептелет. Алар жалпыланган функциялар үчүн алынган. Лемме дю Буа-Реймонго ылайык *u* жана интегралдын алдындагы функциялардын регулярдуу болгонуна байланыштуу бул барабардыктар туура жана $x \notin S$ үчүн дагы.

Чек арада алынган ара катыштар четтик маселелерди чыгаруу үчүн синглярдык чек аралык интегралдык теңдемелерди берет. Кезектеги теорнма туура.

Т е о р е м а 4.4. Эгер u – биринчи (экинчи) четтик маселенин чыгарылышы болсо, анда ал

$$H_S^- u_k(x) = \int_{S^-} U_k^i(y,x)G_i(y)dV(y) + \qquad (4.5)$$

$$+\int_S U_k^i(y,x)g_i(y)dS(y) - V.p.\int_S T_k^i(y,x,n(y))u_i^S(y)dS(y)$$

түрүндөгү СГИУну канагаттандырат.

Бул типтеги чек аралык интегралдык теңдемелердин чыгарылыш маселелери жетишээрлик жакшы изилденген. Серпилгич изотроптук чөйрө үчүн стационардык маселелерди, серпилгич анизотроптук чөйрөлөр үчүн статикалык маселелерди чыгаруу үчүн теңдемелердин сандык ишке ашырылышына Бреббий К., Теллес Ж., Вроубел Л., Бенерджи П., Р.Баттерфилддердин ж.б. иштери арналган.

Бешинчи главада борбордук симметриянын жоктугу менен мүнөздөлгөн анизотроптук пьезоэлектрдик чөйрөлөр каралып чыккан. Жалпыланган функциялар мейкиндигинде кыймылдын теңдемелери жана каралып жаткан чөйрөлөр үчүн алардын чыгарылыштары жазылган. Которуулардын белгилүү баштапкы жана чек аралык маанилери, беттик нагрузкалары, электрдик потенциалы, заряддын агымынын тыгыздыгы боюнча которууларды, чөйрөдөгү чыңалууну жана электр талаасынын чыңалуусун калыбына келтирген пьезосерпилгич чөйрөлөрдөгү четтик маселелерди чыгаруу үчүн Сомильяндын формуласынын динамикалык аналогу түзүлгөн.

Андан ары катуу жана суюк компоненттерденн турган, турактуу ылдамдык менен кыймылдап келе жаткан транспорттук нагрузкалардын таасири аракет эткендеги, М.Бионун бир тектүү изотроптук эки компоненттүү чөйрөсү каралган.

Бул иште үндөн озбогон ылдамдык менен кыймылдоочу кыймылдуу нагрузкалар түрүндөгү массалык күчтөрдүн таасири учурундагы М. Бионун теңдемелер системасындагы Гриндин тензору көрсөтүлгөн. Ошондой эле эрки менен жүргүзүлгөн транспорттук массалык күчтөр учурундагы Био чөйрөсүнүн кыймылынын теңдемелеринин жалпыланган чыгарылыштары берилген.

Пьезосерпилгич чөйрөнүн кыймылынын теңдемелери. Пьезоэлектрдик эффект серпилгич симметриянын борбору боло албаган анизотроптук чөйрөлөрдө болот, бул учурда пьезоэлектрдик константалар $e_{lij} \neq 0$. Пьезосерпилгич чөйрөлөрдө серпилгич жана электрдик талаалар өз ара байланышкандыктан, жалпысынан алганда мындай чөйрөлөр 45 константаны

($C_{ij}^{ml(E)}$ – 21, e_{lij} – 18, κ_{il} – 6) камтыган пьзоэлектрдик тензор менен берилет:

$$C_{ij}^{ml} := \begin{cases} C_{ij}^{ml(E)}, & i,j,m,l=\overline{1,N}, & \\ e_{lij}, & i,j,l=\overline{1,N}, & m=M \\ e_{iml}, & j,m,l=N, & i=M \\ -\kappa_{il}, & j,m=N, & i,l=M \end{cases} \tag{5.1}$$

бул жерде $C_{ij}^{ml(E)}$ – серпилгич константалар матрицасы, $W(v) = \sum_{i,j,m,l}^{N} C_{ij}^{ml(E)} v_m^i v_l^j > 0 \ \forall v$ шарттарын канагаттандырган, туруктуу электрдик талаа учурунда өлчөнүп алынган, e_{lij} – пьезоэлектрдик константалар, κ_{il} – туруктуу деформацияда өлчөнүп алынган диэлектрдик сиңүүчүлүк,

N – мейиндиктин өлчөмдөштүгү (жалпак деформацияда $N=2$, $N=3$ мейкиндик учуруна туура келет), $M = N+1$. $C_{ij}^{ml(E)}$, e_{lij}, κ_{il} константалары индекстердин ордун которууга карата симметриянын төмөндөгү касиеттерине ээ:

$$C_{ij}^{ml(E)} = C_{ij}^{lm(E)} = C_{ji}^{ml(E)} = C_{ml}^{ij(E)}, \qquad e_{lij} = e_{lji}, \qquad \kappa_{il} = \kappa_{li} \tag{5.2}$$

Пьезсерпилгич чөйрөлөрдө серпилгич жана электр талаасы бири-бири менен байланышкан жана абалдын сызыктуу теңдемелери менен берилет:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{ml(E)} u_{m,l} - e_{lij} E_l, \quad i, j, m, l = \overline{1, N} \tag{5.3}$$

$$D_j = e_{jml} u_{m,l} + \kappa_{jl} E_l, \quad j, m, l = \overline{1, N} \tag{5.4}$$

бул жерде $u = (u_1, ..., u_N)$ – серпилгич чөйрөнүн которуулары, σ_{ij} – чыңалуулар тензорунун компоненттери, D_i – электрдик жылдыруунун (которуунун) векторунун компоненттери, E_l – электр талаасынын чыңалуусунун векторунун компоненттери, $u_{i,j} = \partial_j u_i = \partial u_i / \partial x_j$, $x = (x_1, ..., x_N) \in R^N$. Бул жерде жана бир аттуу индекстер боюнча бардык жерде жогоруда көрсөтүлгөн индекстердин өзгөргөн чектеринде көбөйтүндү суммаланат.

Электрдик серпилгич чөйрө үчүн кыймылдын теңдемесине (5.3), (5.4) ара катыштарын коёбуз:

$$\sigma_{ij,j} + G_i = \rho u_{i,tt},$$
$$D_{j,j} = \rho_e$$

бул жерде ρ – чөйрөнүн тыгыздыгы, G_i – массалык күчтүн компоненттери, $u_{i,tt} = \partial^2 u_i / \partial t^2$, t – убакыт, ρ_e – электрдик заряддын тыгыздыгы. Пьезоэлектриктер диэлектрик экенин, эркин электр заряддары жоктугу

($\rho_e \equiv 0$) аларга таандык экенин эсепке алып, пьезосерпилгич чөйрөлөр үчүн төмөндөгү динамиканын теңдемелеринин системасын алабыз:

$$C_{ij}^{ml(E)}u_{m},_{lj} - e_{lij}\varphi,_{lj} = \rho u_{i},_{tt} - G_i \tag{5.5}$$

$$e_{jml}u_{m},_{lj} - \kappa_{jl}\varphi,_{lj} = 0, \quad E_m = -\varphi,_m \tag{5.6}$$

Мына ошентип, пьезосерпилгич чөйрөлөрдөгү стационардык эмес процесстерди изилдөө үчүн аралашкан типтеги теңдемелер системасын карап чыгуу зарыл: анизотроптук серпилгич чөйрөлөрдү ичине ала сызылган гиперболалуулук типтеги теңдемелер (5.5), эллиптикалык типтеги теңдемелер (5.6) – электр талаасынын теңдемеси.

Пьезосерпилгич чөйрөлөр үчүн стационардык эмес четтик маселелердин жалпыланган чыгарылыштары. Шарттары толкундук фронттордо. Серпилгич которууларды жана электрдик потенциалдык бириктирген $\upsilon = (\upsilon_1, \ldots \upsilon_{N+1})$ векторун киргизебиз:

$$\upsilon_j := \begin{cases} u_j, & j = \overline{1, N} \\ \varphi, & j = N+1 \end{cases}, \tag{5.7}$$

Кошанын чыңалуу тензорун жана которуунун электрдик векторун камтыган T_{ij} чыңалуунун матрицасы, ошондой эле Z_{ml} деформация матрицасы, деформациялардын серпилгич тензору $\varepsilon_{ml} = 0{,}5(u_{m},_l + u_{l},_m)$ жана электр талаасынын чыңалуусунун вектору:

$$\mathrm{T}_{ij} := \begin{cases} \sigma_{ij}, & j = \overline{1, N} \\ D_i, & j = M \end{cases}, \qquad \mathrm{Z}_{ml} := \begin{cases} \varepsilon_{ml}, & m = \overline{1, N} \\ -E_l, & m = M \end{cases} \tag{5.8}$$

p_i – вектордук агым, $g_i = \sigma_{ij}n_j$ чыңалуу нагрузкасын бириктирүүчү жана и $q = D_j n_j$ зарядынын тыгыздыгынын агымы жана и $\tilde{G}_i$ булактардын вектору, массалык күчтөрдү камтыйт

$$p_i := \begin{cases} g_i, & i = \overline{1, N} \\ q, & i = M \end{cases}, \qquad \tilde{G}_i := \begin{cases} G_i, & i = \overline{1, N} \\ 0, & i = M \end{cases} \tag{5.9}$$

Гуктун законунун аналогун (Σ жана Z ортосундагы байланыш) жана агымдын вектору үчүн ара катышты төмөндөгү түрдө жазабыз:

$$\mathrm{T}_{ij} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{N} C_{ij}^{ml}\mathrm{Z}_{ml}, \quad i = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, N} \tag{5.10}$$

$$p_i = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{T}_{ij} n_j \quad i = \overline{1, N+1} \tag{5.11}$$

Мына ошентип, жогоруда киргизилген жалпылоолорду (5.1), (5.7) – (5.9) эсепке алуу менен пьезосерпилгич чөйрө үчүн кыймылдын теңдемесин төмөндөгү оператордук түрдө жазууга болот:

$$L_{im}(\partial_x,\partial_t)\upsilon_m(x,t)+\tilde{G}_i(x,t)=0 \qquad (5.12)$$

$$L_{im}(\partial_x,\partial_t)=C_{ij}^{ml}\partial_j\partial_l-\rho\tilde{\delta}_{im}\partial_t^2, \quad i,m=\overline{1,N+1}, \quad j,l=\overline{1,N}$$

$$\tilde{\delta}_{im}:=\begin{cases}\delta_{im}, & i,m=\overline{1,N}\\ 0, & i=m=N+1\end{cases},$$

бул жерде $\partial_x=(\partial_1,...,\partial_N)$, $x\in S^- \subset R^N$, δ_{ij} – Кронекердин символу (белгиси). Электр талаасы квазистатикалык болгондуктан, (5.12) системасы гиперболо-эллиптикалык типте. W нын оң белгиленгендигине байланыштуу (5.12) системасынын характеристикалык теңдемеси c чыныгы тамырга ээ, жалпы учурда толкундун таралуу багытынан көз каранды.

Т е о р е м а. 5.1. Эгер $\upsilon(x,t)$ *(5.12)ни кескин өзгөрүүнүн шарттары аткарылган толкундук фронттордон башка дээрлик бардык жерде канагаттандырса,*

$$[u_i(x,t)]_{F_t}=0, \qquad [\sigma_{ij}n_j+\rho c u_{i,t}]_{F_t}=[e_{lij}E_l n_j]_{F_t}, \qquad (5.13)$$

$$[\varphi(x,t)]_{F_t}=0, \qquad [D_j]_{F_t}=0 \qquad (5.14)$$

анда $\hat{\upsilon}(x,t)$ (5.12) жалпыланган чыгарылышы болуп калат.

$t=0$ болгондо:

$$u_i(x,0)=u_i^0(x), \quad x\in S^-\cup S,$$

$$u_{i,t}(x,0)=u_i^1(x), \quad x\in S^- \text{ деп белгилейбиз} \qquad (5.15)$$

бардыгы үчүн $x\in S$, $t\geq 0$

$$u_i(x,t)=u_i^S(x,t), \qquad \sigma_{ij}(x,t)n_j(x)=g_i(x,t), \qquad (5.16)$$

$$D_j n_j=q^S(x,t), \qquad \varphi(x,t)=\varphi^S(x,t)$$

Белгилүү болгон которуулардын баштапкы жана чек аралык, мейкиндик нагрузкалары, электрдик потенциалы, заряддын агымынын тыгыздыгы маанилери боюнча чөйрөдөгү которууларды, чыңалууну жана электр талаанын чыңалуусун калыбына келтирүү талап кылынат.

Сомильяндын формуласынын динамикалык аналогу. R^N мейкиндигинин бүт жеринде аныкталган жалпыланган функцияларды киргизеби:

$$\hat{u}_k(x,t)=u_k(x,t)H_D^-(x,t), \; \hat{\varphi}(x,t)=\varphi(x,t)H_D^-(x,t), \; \hat{G}_k(x,t)=G_k(x)H_D^-(x,t)$$

Эгер $\upsilon(x,t)$ четтик маселенин классикалык чыгарылышы бар жана ал чыгарылыш бирөө экени далилденген болсо, анда анын жалпыланган чыгарылышы төмөндөгүдөй болот:

$$\hat{\upsilon}_i(x,t) = U_i^k * \widetilde{G}_k + U_i^k \underset{x}{*} \upsilon_k^1(x) H_S^-(x) + \left(U_i^k \underset{x}{*} \upsilon_k^0(x) H_S^-(x)\right)_{,t} +$$
$$+ U_i^k * p_k \delta_S(x) H(t) + C_{kj}^{ml} V_i^k{}_{,l} * \upsilon_j{}_{,t}\, n_m \delta_S(x) H(t) + C_{kj}^{ml} V_i^k{}_{,l} \underset{x}{*} \upsilon_j^1(x) n_m \delta_S(x)$$

Бул жерде $\delta_S(x)$ – сингулярдык жалпыланган функция – S жөнөкөй катмар, ага ылайык $p_k(x,t)\delta_S(x)H(t)$ – D жөнөкөй катмар.

Суюктуктун илээшкектиги болбогон учурдагы *Бионун чөйрөсүнүн кыймылынын теңдемеси* төмөндөгү гиперболалуу теңдемелердин экинчи катардагы системасы менен берилет.

$$(\lambda + \mu) u_j^s{}_{,ji} + \mu u_i^s{}_{,jj} + Q u_j^f{}_{,ji} + G_i^s = \rho_{11} \ddot{u}_i^s + \rho_{12} \ddot{u}_i^f \qquad (5.17)$$

$$Q u_j^s{}_{,ji} + R u_j^f{}_{,ji} + G_i^f = \rho_{12} \ddot{u}_i^s + \rho_{22} \ddot{u}_i^f, \quad (x,t) \in R^3 \times [0,\infty)$$

Бул жерде $u_i^s(x,t)$, $u_i^f(x,t)$ – $x \in R^3$ чекитиндеги, t убактысы учурундагы, серпилгич скелеттин жана суюктуктун которуу векторунун компоненттери, G_i^s, G_i^f – чөйрөнүн катуу жана суюк компоненттерине аракет кылган көлөмдүк күчтөр.

М. Бионун чөйрөсү үч үндүк ылдамдык менен мүнөздөлөт. Алардын экөө c_1, c_2 1- жана 2-тектеги узунунанкеткен толкундардын таралуу ылдамдыктарын билдирет, ал эми

c_3 – туурасынан кеткен толкун ($c_2 < c_3 < c_1$).

Каралып жаткан чөйрө үчүн чыңалуулар жана деформациялардын ортосундагы байланыш Гук законунун жалпыланган түрүндө болот:

$$\sigma_{ij} = \mu(u_i^s{}_{,j} + u_i^f{}_{,j}) + (\lambda u_k^s{}_{,k} + Q u_k^f{}_{,k})\delta_{ij}, \qquad \sigma = -mp = Q u_k^s{}_{,k} + R u_k^f{}_{,k}$$

Бул жерде p – порадагы суюктуктун басымы, σ_{ij} – серпилгич скелеттеги чыңалуу тензорунун компоненттери.

Мындан ары белгилөөлөр ыңгайлуу болсун үчүн векторун $\bar{u} = \{\bar{u}^s, \bar{u}^f\}$ киргизебиз, u_i катуу фазанын которуу компоненттери $i = \overline{1,3}$ үчүн жана суюктук үчүн $i = \overline{4,6}$. Аналогиялуу түрдө массалык күч векторун киргизебиз $\overline{G} = \{\overline{G}^s, \overline{G}^f\}$.

М. Бионун транспорттук теңдемелери. Транспорттук аракеттенүү учурундагы М. Бионун бир тектүү изотроптук эки компоненттүү чөйрөсүнүн (5.17) теңдемелер системасынын чыгарылыш классы каралат, чөйрөдө аракеттенген массалык күч, x_3 огунун узатасынан «c» туруктуу ылдамдыгы менен кыймылдайт деп болжолдосок жана коррдинаттардын кыймылдуу системасында убакыттан көз каранды эмес, б.а. $G_i = G_i(x_1, x_2, x_3 + ct)$. Изделип жаткан которуу u_i ушундай эле түзүмгө ээ: $u_i = u_i(x_1, ..., x_N + ct)$. $x' = (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3 + ct)$ аркылуу координаттардын жаңы кыймылдуу системасын белгилейбиз. Координаттардын жаңы системасында (5.17) теңдемелер системасы төмөндөгүдөй түрдө жазылат:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_i}u_i + Q\frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_i}u_{i+3} + \mu\frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_k}u_i + G_i = c^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2_3}(\rho_{11}u_i + \rho_{12}u_{i+3})$$

$$Q\frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_i}u_i + R\frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_i}u_i + G_{i+3} = c^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2_3}(\rho_{12}u_i + \rho_{22}u_{i+3}) \qquad (5.18)$$

Бул (5.18) теңдемелер системасынын тиби транспорттук нагрузкалардан бир топ эле көз каранды. Бул жерде үнгө чейинки $c < \min\{c_1, c_2, c_3\}$ болгондогу нагрузканын учуру каралат. Бул учурда теңдемелердин тиби – эллиптикалык

Качма чыгарылыштар классындагыМ. Бионун чөйрөсүнүн кыймылынын теңдемелеринин фундаменталдык чыгарылыштары.

U_{ik} М. Бионун эки компоненттүү чөйрөсүнүн динамикасынын теңдемесинин фундаменталдык чыгарылыштарын түзүү үчүн (7.() теңдемелер системасын карап чыгабыз, качма наргузкалардын аракети астындагы топтолгон импульстар функциясы түрүндөгү: $G_{si}(x') = \delta_{ij}\delta(x')$, $G_{fi}(x') = \delta_{ij}\delta(x')$. Бул учурда каралып жаткан теңдемелер системасы төмөндөгүдөй түргө келет:

$$(\lambda+\mu)U_{ik,kj} + \mu U_{ij,kk} + QU_{i(k+N),kj} - c^2\rho_{11}U_{ij,NN} - c^2\rho_{12}U_{i(j+N),NN} + \delta_{ij}\delta(x') = 0,$$

$$QU_{ik,kj} + RU_{i(k+N),NN} - c^2\rho_{12}U_{ij,NN} - c^2\rho_{22}U_{i(j+N),NN} + \delta_{i(j+N)}\delta(x') = 0$$

Бул жерде бир аттуу индекстер боюнча бүтүндөй 1ден Nге чейинки алардын өзгөрүүлөрүнүн жогоруда көрсөтүлгөн чектеринин тегерегинде суммалоо жүргүзүлөт, тензордун өлчөмдөштүгү U_{ij} - ($2N\times 2N$) болсо дагы. Тензордун компоненттери төмөндөгүдөй физикалык мааниге ээ: $1 \le j \le N$ болгондо, бул j-ые катуу фазанын которуу компоненттери, $N+1 \le j \le 2N$ болгондо, - бул *(j-N)*- i-координатасынын огу боюнча топтолгон күчтөрдүн аракетинен катуу фазагаболгон суюктуктун которуу компоненттери же координаталардын (i-N) огу боюнча топтолгон күчтөрдүн аракетинен ($N+1 \le i \le 2N$ болгондо) суюктукка.

Махтын санын $M_l = c/c_l$ $(l = \overline{1,3})$ – бул түрдө белгилейбиз $m_l = \sqrt{1 - M_l^2}$. c – кыймылдуу нагрузкаларды *үндүүгө чейинки* деп белгилейбиз, эгер $c < c_2$ болсо, б.а. $M_l < 1$; үндөн озгон, эгер $c > c_1$, $M_l > 1$. c чоңдугу ылдамдыктардын маанилеринин ортосуна келип калганда (7.5), үндөр ортосундагы (трансүндүк) ылдамдык. Фундаменталдык чыгарылыштардын түрү Махтын санынан көз каранды болгондуктан, өзгөртүп туюнтуулар мейкиндигинде алар төмөндөгүдөй түрдө жазылат

$$\tilde{U}_{kj} = \frac{a_3^2}{\mu}\left(\frac{b_{k3}\delta_{kj}}{a_3^2(\xi^2 - M_3^2\xi_N^2)} - \frac{\xi_k\xi_j}{c^2\xi_N^2}\sum_{l=1}^{3} b_{kl}\frac{1}{\xi^2 - M_l^2\xi_N^2}\right) \quad \text{при} \quad k = \overline{1,N},\ j = \overline{1,2N},$$

$$\tilde{U}_{kj} = \tilde{U}_{kj}, \quad k = \overline{N+1,2N}, \quad j = \overline{1,N}$$ болгондо

$$\tilde{U}_{kj} = \frac{\delta_{kj}}{\rho_{22} c^2 \xi_N^2} + \frac{a_3^2}{\mu}\left(\frac{d_3 \delta_{kj}}{a_3^2(\xi^2 - M_3^2 \xi_N^2)} - \frac{\xi_{k-N}\xi_{j-N}}{c^2 \xi_N^2} \sum_{l=1}^{3} d_l \frac{1}{\xi^2 - M_l^2 \xi_N^2} \right)$$

$k = \overline{N+1,2N}, \quad j = \overline{N+1,2N}$ болгондо,

бул жерде $b_{k1} = \dfrac{a_1^2 - a_f^2}{a_2^2 - a_f^2}, \quad b_{k2} = \dfrac{a_2^2 - a_f^2}{a_2^2 - a_f^2}, \quad b_{k3} = -1, \quad k = \overline{1,3}$,

$$b_{k1} = \zeta_1 \frac{a_1^2 - a_f^2}{a_2^2 - a_f^2}, \quad b_{k2} = -\zeta_2 \frac{\rho_{11} a_2^2 - a_s^2}{\rho_{22} a_1^2 - a_2^2}, \quad b_{k3} = -\zeta_3, \quad k = \overline{4,6},$$

$$d_1 = \frac{\rho_{11} a_1^2 - a_s^2}{\rho_{22} a_1^2 - a_2^2}, \quad d_2 = -\frac{\rho_{11} a_2^2 - a_s^2}{\rho_{22} a_1^2 - a_2^2}, \quad d_3 = -\zeta_3, \quad k = \overline{4,6}$$

Үндүүгө чейинки ($M_l < 1$, т.е $c < c_2$) фундаменталдык чыгарылыштын тензорун алабыз:

$$U_{kj} = \frac{a_3^2}{\mu}\Big[b_{k3}\delta_{kj}\left(m_3^2 r^2 + x_3^2\right)^{-1/2} / 4\pi a_3^2 -$$

$$-\left(\sum_{l=1}^{3} b_{kl}\left(m_l^2 r^2 + x_3^2\right)^{-1/2}\left(x_3^2 x_k x_j / r^4 - x_3\left(\delta_{k3} x_k + \delta_{j3} x_j\right)/ r^2 + \delta_{k3}\delta_{j3w}\right) - \right.$$

$$\left. \left(\left(m_l^2 r^2 + x_3^2\right)^{-1/2} - m_l r\right)\left(\delta_{ij} - x_k x_j / r^2\right)/ r^2 \right) \Big] / 4\pi c^2, \quad k = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,6}$$

$$U_{jk} = U_{kj}, \quad k = \overline{4,6}, \quad j = \overline{1,3}$$

$$U_{kj} = \frac{-\pi \delta_{kj} |x_3|}{\rho_{22} c^2} + \frac{a_3^2}{\mu}\Big\{ d_3 \delta_{dkj}\left(m_3^2 r^2 + x_3^2\right)^{-1/2} / 4\pi a_3^2 -$$

$$-\left(\sum_{l=1}^{3} d_l\left(m_l^2 r^2 + x_3^2\right)^{-1/2}\left(x_3^2 x_k x_j / r^4 - x_3\left(\delta_{k3} x_k + \delta_{j3} x_j\right)/ r^2 + \delta_{k3}\delta_{j3w}\right) - \right.$$

$$\left. -\left(\left(m_l^2 r^2 + x_3^2\right)^{-1/2} - m_l r\right)\left(\delta_{ij} - x_k x_j / r^2\right)/ r^2 \right) \Big\} / 4\pi c^2, \quad k = \overline{4,6}, \quad j = \overline{4,6}$$

$R \to 0$ болгондогу фундаменталдык чыгарылыштар $U_{jk} \approx const / R$.

Үндөн озгон ыламдыктар учурунда ($c > c_l$, $M_l > 1$) төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$U_{kj} = \frac{a_3^2}{\mu}\left[\frac{b_{k3}\delta_{kj}H(x_3 - m_l r)}{2\pi a_3^2\sqrt{x_3 - m_l^2 r^2}} -\right.$$

$$-\left(\sum_{l=1}^{3} b_{kl}H(x_3 - m_l r)\left(x_3^2 - m_l^2 r^2\right)^{-1/2}\left(x_3^2 x_k x_j / r^4 - x_3\left(\delta_{k3}x_k + \delta_{j3}x_j\right)/r^2 + \delta_{k3}\delta_{j3}\right) -\right.$$

$$\left.\left(\left(x_3^2 - m_l^2 r^2\right)^{-1/2} H(x_3 - m_l r)\right)\left(\delta_{kj} - x_k x_j / r^2\right)/r^2\right] / 2\pi c^2, \quad k = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,6}$$

$$U_{jk} = U_{kj}, \quad k = \overline{4,6}, \quad j = \overline{1,3}$$

$$U_{kj} = \frac{-\pi\delta_{kj}\left|x_3\right|}{\rho_{22}c^2} + \frac{a_3^2}{\mu}\left\{d_3\delta_{dkj}\left(x_3^2 - m_3^2 r^2\right)^{-1/2} / 2\pi a_3^2 -\right.$$

$$-\left(\sum_{l=1}^{3} d_l H(x_3 - m_3 r)\left(x_3^2 - m_l^2 r^2\right)^{-1/2}\left(x_3^2 x_k x_j / r^4 - x_3\left(\delta_{k3}x_k + \delta_{j3}x_j\right)/r^2 + \delta_{k3}\delta_{j3}\right) -\right.$$

$$\left. -\left(x_3^2 - m_l^2 r^2\right)^{-1/2} H(x_3 - m_l r)\left(\delta_{ij} - x_k x_j / r^2\right)/r^2\right]\Big\} / 2\pi c^2, \quad k = \overline{4,6}, \quad j = \overline{4,6}$$

($c = c_l$, $M_l = 0$) үндүү ылдамдыктар үчүн фундаменталдык чыгарылышытардын тензору төмөндөгүдөй түргө ээ:

$$\text{для } k = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,6} \quad U_{kj} = \frac{a_3^2}{2\pi\mu}\left\{\frac{b_{k3}\delta_{kj}\delta(x_3)\ln r^{-1}}{a_3^2} -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{c^2}\sum_{l=1}^{3} b_{kl}\left[H(x_3)\left(x_3\left(2x_k x_j / r^2 - \delta_{kj}\right) - \left(\delta_{k3}x_j + \delta_{j3}x_k\right)/r\right)/r - \delta_{k3}\delta_{j3}\delta(x_3)\ln r\right]\right\}$$

$$U_{jk} = U_{kj}, \quad k = \overline{4,6}, \quad j = \overline{1,3}$$

$$\text{для } k = \overline{4,6}, \quad j = \overline{4,6} \quad U_{kj} = \frac{-\pi a_3^2 x_3}{\rho_{22}c^2} + \frac{a_3^2}{\mu}\left\{\frac{d_3\delta_{kj}\delta(x_3)\ln r^{-1}}{a_3^2} -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{c^2}\sum_{l=1}^{3} d_l\left[H(x_3)\left(x_3\left(2x_k x_j / r^2 - \delta_{kj}\right) - \left(\delta_{k3}x_j + \delta_{j3}x_k\right)/r\right)/r - \delta_{k3}\delta_{j3}\delta(x_3)\ln r\right]\right\}$$

Эркин берилген регулярдуу массалык күчтөр үчүн $G_k(x,t)$ Бионун транспорттук теңдемелеринин чыгарылыштары интегралдык түйүн турүнө ээ

$$u_i = \int_{R^3} U_{ik}(x-y)G_k(y)dV(y).$$

Сингулярдык массалык күчтөрдө түйүн жалпыланган функциялар түйүнүнө ылайык алынышы керек.

ЖЫЙЫНТЫКТАРЫ

Бул иште татаалдашкан касиеттерге ээ болгон толкундардын чөйрөдөгү таралуу процесстерин изилдөө үчүн катуу телонун деформациялануучу динамикасынын четтик маселелерин жана кыймылдын теңдемесин чыгаруунун ыкмалары иштелип чыккан.

Жалпыланган функциялардын теориясынын негизинде серпилгич анизотроптук чөйрөлөрдүн кыймылынын теңдемесинин фундаменталдык чыгарылыштарынын ыкмалары иштелип чыккан; бул чөйрөлөрдүн кыймылынын теңдемелери үчүн Гриндин тензорлору, фундаменталдык чыңалуулардын тензорлору жана алардын эң алгачкы түрлөрү түзүлгөн; алардын асимптотикалык сапаттары изилденген. Дүүлүгүүнүн булагы, анын күндүзгү бетине жакын, анын серпилгич касиеттерин эсепке алуу менен аракеттенген учурдагы тектүү массивдин динамикасынын математикалык модели иштелип чыккан. Анизотроптук жарым жалпак үчүн динамиканын биринчи жана экинчи четтик маселелеринин Грин тензорунун трансформанттары түзүлгөн. Энергиянын сакталуу закону, толкун фронтундагы ыламдыктардын кескин өзгөрүүлөрүн чыңалуулардын кескин өзгөрүүлөрү менен байланыштырган импульсту сактоонун шарттары алынган.

Стационардык эмес таасирлердеги жана серпилгич анизотроптук телолордун стационардык термелүү динамикасынын четтик маселелерин чыгаруу үчүн жалпыланган функциялардын ыкмасы иштелип чыккан.

Жалпыланган функциялардын мейкиндигиндеги анизотроптук чөйрөлөрдүн кыймылынын теңдемелеринин жалпыланган чыгарылыштары, жалпыланган функциялардын мейкиндигиндеги Сомильяндын, Гаусстун формулаларынын аналогдору түзүлгөн.

Анизотроптук чөйрөлөрдүн динамикасынын берилген четтик маселелерин чыгаруу үчүн сингулярдык чек аралык интегралдык теңдемелер түзүлгөн.

Пьезосерпилгич чөйрөлөрдүн динамикасынын стационардык эмес четтик маселелерин чыгаруу үчүн жалпыланган функицялардын ыкмасы иштелип чыккан. Белгилүү ылдамдыктары, чыңалуулары жана чек аралык маанилери боюнча изделип жаткан функциянын анын ичиндеги функциядан издөөгө мүмкүндүк берген Сомильяндын формулаларынын динамикалык аналогдору алынган.

Ылдамдыктардын бүтүндөй диапазонунда, транспорттук нагрузкалар учурунда катуу жана суюк компоненттерди камтыган Бионун эки компоненттүү чөйрөсүнүн кыймылынын теңдемелеринин фундаменталдык жана жалпыланган чыгарылыштары түзүлгөн. Үндөн озгон нагрузкалар үчүн толкундук фронттордогу шарттар алынган. Топтолгон импульстардын булактарынын аймагындагы тектүү массивдин чыңалган-деформациялануучу абалынын мүнөзүнө анизотропиялык чөйрөнүн даражасынын тийгизген таасири изилденген. Гриндин тензорунун жана дүүлүгүүлөрдүн импульстук булактарынын аракеттенүү учурундагы ар түрдүү анизотроптук (ортотроптук) серпилгич чөйрөлөрдөгү фундаменталдык чыңалуулардын тензорлорунун сандык эсептөөлөрүнүн жыйынтыктары алынган. Серпилгич анизотропиялык касиеттерге ээ болгон чөйрөдө толкундук фронттордун топологиялык тиби кеңейүүчү сфераларга окшош боло тургандыгы, күчтүү анизотропиялык чөйрөлөрдө татаал толкундук фронттор жана лакундар пайда болоору көрсөтүлгөн..

Диссертациянын темасы боюнча жарыяланган негизги иштердин тизмеси

1. Zakir’yanova, G.K. Dynamic analogues of Green and Gauss's formulas for unsteady dynamics of anisotropic elastic medium at antiplane defor-mation [Текст] / Zakir'yanova G.K. // AIP Conference Proceedings. – 2016. – V.1759. 020150; http://dx.doi.org/10.1063/1.4959616
2. Закирьянова, Г.К. Динамические аналоги формул Грина, Гаусса начально-краевых задач для гиперболических уравнений [Текст] / Г.К.Закирьянова // Математический журнал. – 2010. - Т.10. - № 3(37). - С.45-50.
3. Закирьянова, Г.К. Обобщенные решения нестационарных краевых задач для гиперболического уравнения [Текст] / Г.К.Закирьянова // Вестник НИИ развития путей сообщения. – 2009. - №3 (28). - С. 44–50
4. Закирьянова, Г.К. Фундаментальные решения гиперболических уравнений [Текст] /Г.К.Закирьянова // Межд. научная конф. “Суверен-ный Казахстан: 15-летний путь развития космической деятельности”. Сб.докл./ Алматы, Казахстан. -2006. - С.53-56
5. Закирьянова, Г.К. О единственности решений краевых задач динами-ки анизотропных упругих сред при антиплоской деформации с учетом ударных волн [Текст] / Т.Б. Дуйшеналиев, Г.К.Закирьянова // IV межд. научн. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Алматы. - 2014. - С.268-275.
6. Zakir’yanova, G.K. The Green Matrix for Strictly Hyperbolic Systems with Second-Order Derivatives [Текст] / Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. //Differential Equations. -2001 - Vol.37. - No.4. - P.517-523.
7. Закирьянова, Г.К. Ударные волны в анизотропной среде при дей-ствии импульсных сосредоточенных источников [Текст] / Г.К.Закирьянова //Высокие технологии,образование, промышлен-ность. Том 3. Сб. статей 11 межд. научно-практ. конф. "Фундамен-тальные и прикладные исследования, разработка и применение высо-ких технологий в промышленности". Санкт-Петербург, Россия. - 2011. - С. 143-150.
8. Закирьянова, Г.К. Динамика анизотропных сред при взрывных воздействиях [Текст] / Г.К.Закирьянова // Материаловедение. – 2013. – №2. – С. 149-152.
9. Закирьянова, Г.К. Фундаментальные и обобщенные решения уравне-ний динамики ортотропных сред[Текст] / Г.К.Закирьянова // Известия КГТУ им. И.Раззакова. – 2014. --№32. - С.112-116.
10. Закирьянова, Г.К. Динамика анизотропных сред при действии импульсных сосредоточенных источников [Текст] / Г.К.Закирьянова // Материалы IV межд. научн. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Алматы. – 2014. - С.291-298.

11. Закирьянова, Г.К. Матрица Грина для строго гиперболических систем с производными второго порядка [Текст] /Л.А. Алексеева, Г.К.Закирьянова //Дифференциальные уравнения. – 2001. - т.37. - №4. - С.488-494.
12. Закирьянова, Г.К. Волновая динамика ортотропных среде при действии импульсных источников [Текст] / Г.К.Закирьянова // Сборник материалов Респ. науч-метод. конф. «Актуальные вопросы механики и математики». Астана. – 2016. - С. 38-43.
13. Закирьянова, Г.К. Фундаментальные решения первой и второй краевых задач динамики для упругой анизотропной полуплоскости. [Текст] / Ш.А.Дильдабаев, Г.К.Закирьянова // Изв. НАН РК, сер. Физ-мат. – 1993. - №5. - С.65 -70.
14. Закирьянова, Г.К. Импульсные источники в анизотропной среде [Текст] / Г.К.Закирьянова // Труды межд.научн конф. "Теория функций, информатика, дифференц. уравнения и их приложения". Алматы. Ка-захстан. - 2015.- С.127-130.
15. Zakir’yanova, G.K Generalized Solutions of Initial–Boundary Val-ue Problems for Second_Order Hyperbolic Systems [Текст] /Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2011. - Vol. 51. -No. 7. - P. 1194–1207.
16. Закирьянова, Г.К. Волны от сосредоточенных источников в ани-зотропной среде [Текст] /Г.К.Закирьянова // Материалы межд. научно–практ. конф. Проблемы геомеханики и преподавания естеств. дисц. Алматы.– 2012. - С. 155-159.
17. Закирьянова, Г.К. Регулярное представление формул Кирхгофа и Сомильяны для нестационарной динамики анизотропных сред на волновых фронтах [Текст] / Ш.М.Айталиев, Л.А. Алексеева, Ш.А.Дильдабаев, Г.К.Закирьянова // Вестник АН КазССР. – 1991. -№ 3. - С.58-62.
18. Закирьянова, Г.К. Нестационарные уравнения движения анизо-тропных сред в пространстве обобщенных функций. Формулы Кирхгофа и Сомильяны [Текст] /Л.А. Алексеева, Г.К.Закирьянова // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1991. -№ 1. - С. 70-74.
19. Закирьянова, Г.К. Метод граничных интегральных уравнений в динамике сред с усложнен-ными свойствами [Текст] /Л.А. Алексеева, В.В. Шершнев, Г.К.Закирьянова // Матер. научной сессии ОФМН, посв. пробл. развития механики и машиностроения в Казахстане. – 1993. - С. 9-18.
20. Закирьянова, Г.К. Регулярное представление формул Кирхгофа и Сомильяны для нестационарной динамики анизотропных сред на контуре. [Текст] / Г.К.Закирьянова //Вестник АН КазССР. – 1992.- № 3.- С.79-84.
21. Закирьянова, Г.К. Граничные интегральные уравнения основ-ных краевых нестационарных задач анизотропной среды. [Текст] / Г.К.Закирьянова // Известия АН КазССР, 1993, №5 деп № 1146 -В93 от 2.04.93
22. Zakir’yanova, G.K. Boundary Integral Equations Method in two-and three-dimensional probl. of elastodynamics [Текст]/ Alexeyeva L.A., Dildabayev Sh.A., Zhanbyrbaev A.B., Zakir'yanova G.K. // Extended Ab-str. The Third

World Congress on Computational Mechanics. Chiba, Ja-pan. August 1-5. - 1994.- V.I.- P.848-849.
23. Zakir’yanova, G.K. Boundary Integral Equations Method in two-and three-dimensional problems of elastodynamics. [Текст] / Alexeyeva L.A., Dildabayev Sh.A., Zhanbyrbaev A.B., Zakir'yanova G.K. // Compu-tational mechanics.- 1996. - Vol.18.- No 2. - P.147-157.
24. Zakir’yanova, G.K. Dynamic analogues of Somigliana's formula for unsteady dynamics of elastic media with an arbitrary degree of anisot-ropy. [Текст] / Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. //J. Appl. Maths Mechs. – 1994. - Vol.58. - No2. - P. 367- 372.
25. Zakir’yanova, G.K. Discontinuous solutions of boundary value problems for hyperbolic systems [Текст] / Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. // Труды межд. .конф. Современное состояние и перспективы раз-вития математики в рамках прогр. “Казахстан в третьем тысячелетии”. Алматы. – 2001.- С. 140-143.
26. Zakir’yanova, G.K. Generalized Solutions of Boundary Value Problems of Dynamics of Anisotropic Elastic Media [Текст] /Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. // Journal of the Mechanical Behavior of Materi-als. 2005 - Vol. 16. - Nos.4-5. - P. 259-267.
27. Zakir’yanova, G.K. Generalized Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Hyperbolic Systems [Текст] / Zakir'yanova G.K. // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications –II, Yokohama Publishers. – 2006. - P. 409-416.
28. Закирьянова, Г.К. Динамические аналоги формулы Сомильяны для нестационарной динамики упругих сред с произвольной степенью анизотропии [Текст] / Л.А. Алексеева, Г.К.Закирьянова //ПММ. -1994. - т.58.- №2. - С.170-175.
29. Закирьянова, Г.К. Обобщенные решения начально-краевых за-дач для гиперболических систем второго порядка [Текст] /Л.А. Алек-сеева, Г.К.Закирьянова // ЖВММФ. – 2011. – т. 51. - № 7. - С. 1280–1293.
30. Zakir'yanova G.K. Generalized Solutions of Boundary Value Prob-lems for Second Order Hyperbolic Systems [Текст] / Zakir'yanova G.K. // X Int. Conf. on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications (Sept.2004 Osaka, Japan). Abstracts. 42-43pp.
31. Закирьянова, Г.К. Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах для эллиптических систем второго порядка [Текст] / Г.К.Закирьянова // Труды межд.конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения». Алматы. - 2002. - С.112-115
32. Закирьянова, Г.К. Обобщенные решения краевых задач стацио-нарных колебаний анизотропной упругой среды [Текст] / Г.К.Закирьянова // Изв.НАН РК. Сер физ-мат. – 2010. - № 3. - С.103–106.
33. Закирьянова, Г.К. Метод граничных интегральных уравнений для решения стационарных краевых задач [Текст] / Г.К.Закирьянова // Труды Межд. науч-практ. конф. "Механика и строительство транс-портных сооружений". Алматы. – 2010. - С.68–72.

34. Закирьянова, Г.К. Метод граничных интегральных уравнений в стационарных задачах для анизотропной упругой среды [Текст] / Дуйшеналиев Т.Б., Г.К.Закирьянова // Материаловедение. –2013. –№2. – С. 146-149.
35. Закирьянова, Г.К. Динамический аналог формулы Сомильяны для решения нестационарных краевых задач в пьезоупругих средах [Текст] / Г.К.Закирьянова // ЖПЭОС. – 2010. -Вып.12. - Т.1. - С.54–60.
36. Закирьянова, Г.К. Обобщенные решения начально–краевых за-дач для пьезоупругих сред [Текст] / Г.К.Закирьянова // Труды межд. науч-практ. конф. «Математическое и компьютерное моделирование экологических процессов и актуальные проблемы современного обра-зования», т.1. Тараз – 2010. - С. 37–42.
37. Закирьянова, Г.К. Фундаментальные решения уравнений движе-ния среды М.Био при транспортных нагрузках, движущихся с дозву-ковой скоростью [Текст] / Г.К.Закирьянова // Труды межд. науч. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды. Бишкек. –2012. – С.272-277.
38. Закирьянова, Г.К. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений движения двухкомпонентной среды при транспортных нагрузках [Текст] / Г.К.Закирьянова // Труды межд. науч. конф. «Диф-ференциальные уравнения и математическая физика». Алматы. – 2014. – С.273–277.
39. Zakir'yanova G.K. Generalized and fundamental solutions of M. Biot equations for moving loads [Текст] / Zakir'yanova G.K. // ISAAC 9-th Congress: abstracts. – Krakow, 2013. – pp. 227–228

01.02.04 – деформацияланууч катуу телонун механикасы адистиги боюнча физика-математика илимдеринин доктору окумуштуу даражасын изденүү боюнча

Закирьянова Гульмира Кожахметовнанын

“Татаалдашкан касиеттерге ээ болгон чөйрөнүн динамикасынын четтик маселелеринин фундаменталдык жалпыланган чыгарылыштары”

темасындагы диссертациясынын

КОРУТУНДУСУ

Негизги сөздөр: толкундук динамика, серпилгич, пьезосерпилгич, Био чөйрөсү, четтик маселе, шыкалган-деформацияланган абал, транспорттук нагрузка (жүктөм), стационардык термелүүлөр, жалпыланган функциялар ыкмасы.

Изилдөөлөрдүн объектиси: серпилгич анизотроптук жана пьезосерпилгич чөйрөлөр, ошондой эле изотроптук Био чөйрө.

Изилдөөлөрдүн ыкмалары: туташ чөйрөлөрдүн механикасынын, жалпыл ган функциялардын, эсептеп чыгаруучу математиканын ыкмаларын камтыйт.

Изилдөөнүн максаты – деформацияланган катуу телонун динамикасынын четтик маселелерин жана кыймылынын теңдемесинин чыгарылыш ыкмаларын иштеп чыгуу жана татаалдашкан касиеттерге ээ болгон чөйрөлөрдөгү толкундардын таралуу процесстерин изилдөө.

Иштин илимий жаңылыгы: жалпыланган функциялар теориясынын негизинде серпилгич анизотроптук чөйрөлөрдүн кыймылынын теңдемелеринин фундаменталдык чыгарылыштарын түзүүнүн ыкмасы, стационардык эмес таасирлер астындагы жана стационардык термелүүлөр учурундагы анизотроптук телолордун динамикасынын четтик маселелерин чыгаруу үчүн жалпыланган функциялар ыкмасы иштелип чыккан, жалпыланган функциялар мейкиндигиндеги анизотроптук чөйрөлөрдүн кыймылынын теңдемесинин жалпыланган чыгарылыштары, анизотроптук чөйрөлөрдүн динамикасынын берилген четтик маселелерин чыгаруу үчүн сингулярдык чек аралык интегралдык теңдемелер, жалпыланган функциялар мейкиндигиндеги Сомильяндын, Гаусстун формулаларынын аналогдору түзүлгөн. Энергиянын сакталуу закону, толкун фронтундагы ылдамдыктын кескин өзгөрүүсүн чыңалуунун кескин өзгөрүүсү менен байланыштырган фронттордогу импульсту сактоонун шарттары алынган. Ошондой эле диссертациялык иште пьезосерпилгич чөйрөлөрдүн динамикасынын стационардык эмес четтик маселелерин чыгаруу үчүн жалпыланган функциялар ыкмасы иштелип чыккан. Изделип жаткан функциянын белгилүү ылдамдыктары, чыңалуулары жана башка чек аралык маанилери боюнча изделип жаткан эле функциянын ичинен табууга мүмкүн болгон Сомильяндын формулаларынын динамикалык аналогдору алынган. Транспорттук нагрузкалардагы Бионун эки компоненттүү чөйрөсүнүн кыймылынын теңдемелеринин жалпыланган чыгарылыштары түзүлгөн жана алардын касиеттери изилденген.

Колдонуу тармактары. Сунушталган ыкма сокмо толкундар менен коштолгон физикалык процесстерди изилдөөгө жана гиперболалуулук, эллиптикалык жана аралаш типтеги теңдемелер менен берилген туташ чөйрөлөрдүн динамикасынын маселелеринин кеңири классын чечүүгө мүмкүнчүлүк берет.

SUMMARY

Of dissertation of Gulmira Kozhakhmetovna Zakiryanova on the topic: "The fundamental and generalized solutions of boundary value problems of the dynamics of media with complicated properties" for the degree of doctor of physical and mathematical sciences on a specialty 01.02.04. - Mechanics of deformable solids

Keywords: wave dynamics, elasticity, piezoelasticity, medium of Bio, boundary value problem, stress-strain state, moving load, stationary oscillations, method of generalized functions.

The **object of research** are elastic isotropic and anisotropic medium, piezoelastic medium and twocomponent medium of Bio.

Research methods include the methods of continuum mechanics, generalized functions, Computational Mathematics.

The purpose of work are development the methods for solving the motion equations and boundary value problems of the dynamics of deformable solids and investigation the waves propagation in media with complicated properties.

The scientific novelty of this work are development on the basis of the theory of generalized functions method of construction the fundamental solutions of the motion equations of the elastic anisotropic media, development of a method of generalized functions for solving boundary value problems of the dynamics of anisotropic bodies for nonstationary force, and in the case of stationary oscillations, the construction of generalized solutions of the motion equations of anisotropic media in space generalized functions, analogues of Somigliana and Gauss's formulas in the space of generalized functions, the construction of singular boundary integral equations for solving the boundary value problems of the dynamics of anisotropic media. The energy conservation law is obtained, the condition of conservation of momentum at the front, which connects the velocity jump at the wave front with a stress jump. Also the generalized functions method for the solution of non-stationary boundary value problems of the dynamics piezoelastic medium is developed. The dynamical analogues of Somigliana's formula are obtained. They allow by known velocities, stress and other boundary values to find the required functions within it. The fundamental and generalized solutions of the motion equations for two-component medium of Bio under with moving loads are constructed and their properties are studied. Conditions on the wave fronts are obtained.

Application area. The developed method allows investigating the physical processes that are accompanied by shock waves, and solve a wide class of problems of the dynamics of continuous media described by equations of hyperbolic, elliptic and mixed types.

РЕЗЮМЕ

диссертации Закирьяновой Гульмиры Кожахметовны на тему: «Фундаментальные и обобщенные решения краевых задач динамики сред с усложненными свойствами» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04-Механика деформируемого твердого тела

Ключевые слова: волновая динамика, упругость, пьезоупругость, среда Био, краевая задача, напряженно-деформированное состояние, транспортная нагрузка, стационарные колебания, метод обобщенных функций.

Объектом исследований являются упругие анизотропные и пьезоупругие среды, а также двухкомпонентная среда М.Био.

Методы исследований включают аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений с использованием моделей механики сплошных сред: метод интегральных преобразований, метод граничных интегральных уравнений, метод обобщенных функций и др. Программирование и реализация решений на языке Fortran, в системе MathCad-14.методы механики сплошных сред, обобщенных функций, вычислительной математики.

Цель работы заключается в разработке методов решения уравнений движения и краевых задач динамики деформируемого твердого тела и исследование процессов распространения волн в средах с усложненными свойствами.

Научная новизна работы состоит в разработке на основе теории обобщенных функций метода построения фундаментальных решений уравнений движения упругих анизотропных сред, разработке метода обобщенных функций для решения краевых задач динамики анизотропных тел при нестационарных воздействиях и в случае стационарных колебаний, построении обобщенных решений уравнений движения анизотропных сред в пространстве обобщенных функций, аналогов формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций, построении сингулярных граничных интегральных уравнений для решения поставленных краевых задач динамики анизотропных сред. Получены закон сохранения энергии, условие сохранения импульса на фронтах, которое связывает скачок скоростей на фронте волны со скачком напряжений. В диссертационной работе также разработан метод обобщенных функций для решения нестационарных краевых задач динамики пьезоупругих сред. Получены динамические аналоги формул Сомильяны, которые позволяют по известным скоростям, напряжениям и другим граничным значениям искомых функций находить искомые функции внутри него. Построены фундаментальные и обобщенные решения уравнений движения двухкомпонентной среды Био при транспортных нагрузках во всем диапазоне скоростей и изучены их свойства. Для сверхзвуковых нагрузок получены условия на волновых фронтах

Область применения. Разработанный метод позволяет исследовать физические процессы, сопровождающиеся ударными волнами, и решать широкий класс задач динамики сплошных сред, описываемых уравнениями гиперболических, эллиптических и смешанных типов