**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж.Баласыгына**

Диссертационный совет Д 01.15.513

На правах рукописи
УДК 515.122, 512.56

НУРАКУНОВ АНВАР МУХПАРОВИЧ

КОНЕЧНАЯ АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ, РЕШЕТКИ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Специальности: 01.01.04 — геометрия и топология
01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Бишкек – 2016

Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной математики НАН КР.

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор,
академик НАН КР Борубаев Алтай Асылканович.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
Швидефски Марина Владимировна, Институт математики, Сибирское отделение РАН, Новосибирск, Россия;

доктор физико-математических наук, профессор
Тусупов Джамалбек Алиаскарович, Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан;

доктор физико-математических наук, профессор
Асанов Авыт, Институт теоретической и прикладной математики НАН КР, Бишкек, Кыргызстан.

Ведущая организация:

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.

Защита состоится 15 сентября 2016 г. в 14 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 01.15.513 при Институте теоретической и прикладной математики НАН КР и Кыргызском национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус №6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Национальной академии наук КР.

Автореферат разослан “___” июля 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются следующие три открытые проблемы, каждая из которых относится к известным проблемам теории многообразий и квазимногообразий алгебраических структур и на протяжении более чем 50 лет хорошо известны в литературе по Универсальной алгебре, Теории решеток и Общей топологии.

Проблема конечной аксиоматизируемости многообразий и квазимногообразий: Найти достаточные и, по возможности, необходимые условия конечной аксиоматизируемости многообразий и квазимногообразий алгебраических структур.

Проблема Биркгоффа-Мальцева: Какие решетки изоморфны решеткам многообразий и квазимногообразий алгебраических структур?

Проблема стандартизации топологических квазимногообразий: Найти достаточные условия стандартности топологических квазимногообразий алгебраических структур.

Проблема конечной аксиоматизируемости многообразий и квазимногообразий есть часть проблемы конечной аксиоматизируемости, хорошо известной в Математической логике.

Проблема Биркгоффа-Мальцева впервые была предложена Гарреттом Биркгоффом в пленарном докладе на Первой Канадской Математической Конференции в 1945 году в Монреале и повторена Анатолием Ивановичем Мальцевым в пленарном докладе на Международном Математическом Конгрессе в Москве в 1966 году.

Топологические квазимногообразия естественным образом возникли в Теории категорий. Исследования квазимногообразий для которых их двойственные топологические квазимногообразия стандартны является одним из известных направлений теории квазимногообразий и топологических структур.

Научные программы, связанные с темой диссертации. Институт теоретической и прикладной математики НАН КР: Равномерные топологические пространства и их отображения, 2015-2017гг., госрегистрация №0007125; Фонд гражданских исследований и развития, США (US CRDF): Two leading problems of universal algebra and lattice theory (Две ведущие проблемы универсальной алгебры и теории решеток), грант KYM1-2852-BI-07, 2006-2008гг.; Фонд сотрудничества стран Евросоюза и СНГ (INTAS): Universal algebra and lattice theory (Универсальная алгебра и теория решеток), грант 03-51-4110, 2004-2006гг..

Цель исследования. Основной целью диссертации является исследования в рамках вышеназванных проблем: Проблемы конечной аксиоматизируемости, Проблемы Биркгоффа-Мальцева и проблемы стандартизации топологических квазимногообразий. По первой проблеме целью было получение результатов для квазимногообразий, которые являются естественными обобщениями результатов, полученных для многообразий и топологических многообразий алгебраических структур. По второй - найти представление решеток многообразий решетками конгруэнций и исследовать сложность решеток квазимногообразий. По последней проблеме целью было нахождение достаточных условий стандартности топологичесих квазимногообразий.

Основные результаты.

- Решена проблема конечной аксиоматизируемости квазимногообразий алгебр с определимыми относительными главными подконгруэнциями в терминах относительно (конечно) подпрямо неразложимых алгебр. Доказано, что квазимногообразие алгебр с определимыми относительными главными подконгруэнциями имеет конечный базис квазитождеств тогда и только тогда, когда класс относительно (конечно) подпрямо неразложимых алгебр строго элементарен.
- Найдены достаточные условия конечной аксиоматизируемости относительно конгруэнц-дистрибутивных квазимногообразий. В частности, доказано, что локально конечное относительно конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие со строго элементарным классом относительно конечно подпрямо неразложимых алгебр является конечно аксиоматизируемым.
- Найдено представление решеток многообразий в виде решеток конгруэнций моноидов. Именно доказано, что решетка L есть решетка многообразий тогда и только тогда, когда она двойственно изоморфна некоторой решетке конгруэнций обогащенного моноида.
- Доказано, что решетка квазимногообразий всех точечных абелевых групп Q-универсальна. Построена решетка квазимногообразий точечных абелевых групп с неразрешимой проблемой вложимости конечных решеток. Показано, что таких неизоморфных решеток квазимногообразий континуум. Найдена алгоритмическая сложность невычислимости.

- Найдены достаточные условия на конечно порожденные квазимногообразия алгебр, которые обеспечивают конечную аксиоматизируемость и стандартность соответствующего топологического квазимногообразия. В частности, таким условием является свойство определимости главных подконгруэнций.

Все основные результаты получены автором единолично, за исключением первого результата, который был получен в соавторстве с М.Стронковски.

Методы исследования. Основными методами исследований являются методы Универсальной алгебры, Теории решеток, Математической логики, Теории моделей, Теории рекурсивных функций и Общей топологии.

Научная новизна. Все результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Проблемы носят теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы и используются не только в Универсальной алгебре и теории решеток, но и в Теории групп, Теории колец, других классических алгебрах, классической и неклассических логиках, топологических алгебрах и других областях математики, связанных с математической логикой и общей топологией..

Апробация результатов работы. Результаты работы были доложены на различных конференциях и семинарах по Универсальной алгебре и теории решеток, Математической логике, Теории моделей. В частности, первый результат был доложен на семинаре 'Algebra and Logic' ТУ Дармштадт (2002), второй – на конференции Logic colloquium 2008, Берн (2008), третий – на конференции Logic colloquium 2005, Турин (2005), четвертый – на Second International Conference on Order, Algebra and Logics, Краков (2011), последний – на конференции 'Борубаевские чтения', Бишкек(2016).

Публикации. Результаты, вошедшие в диссертацию, опубликованы в статьях [1]–[15]. Из опубликованных статей: 11 статей опубликованы в журналах, входящих в базу данных Web of Sciences, а также в Scopus, 1 статья опубликована в журнале, входящем в «Перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК КР для опубликования основных результатов диссертации на соискание ученой степени доктора наук», 1 статья опубликована в журнале, входящим в базу данных РИНЦ, 2 статьи опубликованы в журналах других изданий. Результаты, выполненные в соавторстве, не

вошли в диссертацию в качестве основных, за исключением совместного результата с М.Стронковски.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 108 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение

В Введении диссертации приводится актуальность темы, история проблем, их современное состояние и описание основных результатов.

1. ГЛАВА 1. Проблема конечной аксиоматизируемости

В первой главе диссертации исследуется Проблема конечной аксиоматизируемости для некоторых хорошо известных классов алгебр. Приводится доказательство первых двух основных результатов работы.

В первом параграфе этой главы приводятся основные определения и предварительные результаты, которые будут использоваться на протяжении всей диссертации.

Во втором параграфе дается полное описание всех конечно аксиоматизируемых квазимногообразий со свойством определимости относительных главных подконгруэнций в терминах (конечной) подпрямой неразложимости. Это описание является первым основным результатом диссертации. Также в этом параграфе приводятся некоторые следствия из основного результата.

Квазимногообразие алгебр $\mathcal{R}$ имеет *определимые относительные главные подконгруэнции* (кратко, ООГпК), если существуют такие $\mathcal{R}$-конгруэнц-формулы $\varphi_0(x, y, u, v, \bar{w})$, $\varphi_1(x, y, u, v, \bar{w})$, что для любой алгебры $\mathbf{A} \in \mathcal{R}$ и любых $a, b \in A$ существуют $c, d \in A$ такие, что

$$\mathbf{A} \models \exists \bar{w} \varphi_0(c, d, a, b, \bar{w}),$$

$$\theta_{\mathcal{R}}(c, d) = \{(e, f) \in A \times A \mid \mathbf{A} \models \exists \bar{w} \varphi_1(e, f, c, d, \bar{w})\}.$$

Первым основным результатом диссертации является следующая

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{R}$ - квазимногообразие алгебр конечной сигнатуры со свойством определимости относительных главных подконгруэнций. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) $\mathcal{R}$ конечно аксиоматизируемо;

ii) Класс конечно подпрямо $\mathcal{R}$-неразложимых алгебр $\mathcal{R}_{FSI}$ конечно аксиоматизируем;

iii) Класс подпрямо $\mathcal{R}$-неразложимых алгебр $\mathcal{R}_{SI}$ конечно аксиоматизируем.

Этот результат был получен автором и Михалом Стронковски в совместной работе 2007 года [8].

Доказательство теоремы основано на доказательстве того, что квазимногообразие с ООГпК конечно аксиоматизируемо внутри многообразия им порожденным.

Отметим, что для многообразий свойство ООГпК было введено Бэйкером и Вангом в 2001 году и называется "определимые главные подконгруэнции"(ОГпК). Если в качестве $\varphi_0(x, y, u, v, \bar{w})$ взять формулу $\{x, y\} = \{u, v\}$, то мы получим свойство "определимые относительные главные конгруэнции"(ООГК), введеное Челаковским и Дзебяком в работе 1996 года, и автором в работе 1990 года. Многообразия алгебр с ООГК хорошо известны и называются многообразиями с определимыми главными конгруэнциями (ОГК).

Не трудно видеть, что свойство ООГпК слабее свойств ОГпК и ООГК, которые в свою очередь слабее свойства ОГК. Отсюда мы получаем, что Теорема 1.1 содержит в себе в качестве следствий такие результаты о конечной аксиоматизируемости, как Теорема МакКензи для многообразий с ОГК (1978), Теорема Бэйкера-Ванга для многообразий с ОГпК (2001) и результат, полученный Челаковским-Дзебяком (1996) и, независимо, автором для квазимногообразий с ООГК (1990).

В конце первого параграфа доказывается

Лемма 1.2. *Любое конечно порожденное относительно конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие алгебр имеет ООГПК.*

Отсюда, объединяя Лемму 1.2 и Теоремы 1.1, мы получаем Теорему Пигоцци.

Следствие 1.3 (Теорема Пигоцци)**.** *Любое конечно порожденное относительно конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие алгебр имеет конечный базис квазитождеств.*

Во втором параграфе первой главы приводятся достаточные условия конечной аксиоматизируемости относительно конгруэнц-дистрибутивных квазимногообразий алгебр.

Говорим, что решетка L имеет не более чем счетную ширину, если любая антицепь не более чем счетна. Решетка L удовлетворяет *условию максимальности* (или является нетеровой), если любая

возрастающая цепь имеет наибольший элемент. Двойственным образом определяется условие минимальности для убывающих цепи (артиновость). Основным результатом этого параграфа и вторым основным результатом диссертации является следующая:

Теорема 1.4. *Пусть $\mathcal{R}$ – конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие алгебр конечной сигнатуры, в котором класс конечно подпрямо $\mathcal{R}$-неразложимых алгебр конечно аксиоматизируем. Если для любого $n > 0$ решетка конгруэнций $\mathcal{R}$-свободной алгебры ранга n имеет не более чем счетную ширину либо удовлетворяет условию минимальности, либо удовлетворяет условию максимальности, то квазимногообразие $\mathcal{R}$ имеет конечный базис квазитождеств.*

Для доказательства теоремы по данному конгруэнц-дистрибутивному квазимногообразию $\mathcal{R}$, в котором класс конечно подпрямо $\mathcal{R}$-неразложимых алгебр конечно аксиоматизируем, строится конечно аксиоматизируемый класс алгебр $\mathcal{L}(\mathcal{R})$, замкнутый относительно подпрямых произведений. Далее, используя свойства класса $\mathcal{L}(\mathcal{R})$, доказывается, что квазимногообразие $\mathcal{R}$, удовлетворяющее условиям Теоремы 1.4, совпадает с классом $\mathcal{L}(\mathcal{R})$.

Легко видеть, что любое локально конечное квазимногообразие удовлетворяет каждому из перечисленных условий Теоремы 1.4. Следовательно,

Следствие 1.5. *Пусть $\mathcal{R}$ – локально конечное конгруэнц-дистрибутивное квазимногообразие алгебр конечной сигнатуры, в котором класс конечно подпрямо $\mathcal{R}$-неразложимах алгебр конечно аксиоматизируем. Тогда квазимногообразие $\mathcal{R}$ конечно базируемо.*

Так как любое конечно порожденное квазимногообразие локально конечно и имеет конечное число относительно конечно подпрямо неразложимых алгебр и все они конечны, то в качестве следствия мы получаем другое доказательство Теоремы Пигоцци.

Отметим также, что эквациональная определимость пересечения относительных главных конгруэнций влечет относительную конгруэнц-дистрибутивность. Отсюда и из доказательства Теоремы 1.4 можно получить результат Я.Челаковски-В.Дзебяка.

Следствие 1.6 (Я.Челаковски-В.Дзебяк)**.** *Пусть $\mathcal{R}$ – квазимногообразие алгебр конечной сигнатуры с эквационально определимыми пересечениями главных конгруэнций. Квазимногообразие $\mathcal{R}$ конечно базируемо тогда и только тогда, когда класс конечно подпрямо $\mathcal{R}$-неразложимых алгебр конечно аксиоматизируем.*

2. ГЛАВА 2. Проблема Биркгоффа-Мальцева: решетки многообразий

Во второй главе диссертации исследуется Проблема Биркгоффа-Мальцева для решеток многообразий, то есть, "Какие решетки изоморфны решеткам многообразий?"

В данной главе мы дадим полное описание решеток многообразий в терминах решеток конгруэнций ET-моноидов.

В первом параграфе главы даются основные определения и приводится формулировка теоремы.

Пусть $\mathbf{M} = \langle M; \cdot, 1, \phi, \phi_0 \rangle$ - алгебра, сигнатура которой состоит из одной бинарной операции $\cdot$, константы 1 и двух унарных операций ϕ, ϕ_0, причем $(\cdot, 1)$-редукт алгебры $\mathbf{A}$ есть моноид. Как обычно xy означает $x \cdot y$, $fx = f(x)$, $f^0(x) = x$ и $f^{n+1} = f(f^n(x))$, $f \in \{\phi, \phi_0\}$. Говорим, что элемент $a \in M$ имеет *ϕ-высоту* $n > 0$, если n наименьшее число со свойством $\phi^n(a) = \phi^{n+1}(a)$. Если такого числа не существует, то говорим, что $a \in M$ имеет бесконечную ϕ-высоту.

Для любого элемента $a \in M$ ϕ-высоты $n > 0$ определим полином $f_a(x_0, \ldots, x_{n-1})$ следующим образом:

$$f_a^{(0)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = a;$$

$$f_a^{(k)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \phi(\phi_0^{n-k+1} x_{k-1} \cdot f_a^{(k-1)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})), \quad k \leq n;$$

$$f_a(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f_a^{(n)}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Алгебра $\mathbf{M} = \langle M; \cdot, 1, \phi, \phi_0 \rangle$ называется *моноидом эквациональных теорий* (кратко, *ET-моноидом*), если $\mathbf{M}$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) любой элемент из $\mathbf{M}$ имеет конечную ϕ-высоту;
(2) $\phi(1) = 1$, $x \cdot \phi_0(y) = \phi_0(y)$ для всех $x, y \in \mathbf{M}$;
(3) для любого $a \in \mathbf{M}$ ϕ-высоты n:

$$f_a(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = a, \text{ где } a_0 = \phi_0^0(1) = 1, a_i = \phi_0^i(1),\ 1 \leq i < n,$$

$$x \cdot f_a(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f_a(x \cdot x_0, x \cdot x_1, \ldots, x \cdot x_{n-1}),$$

$$\phi f_a(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f_a(\phi x_0, \phi x_1, \ldots, \phi x_{n-1}),$$

$$\phi_0 f_a(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = f_a(\phi_0 x_0, \phi_0 x_1, \ldots, \phi_0 x_{n-1}),$$

для всех $x, x_0, \ldots, x_{n-1} \in M$.

Теперь мы сформулируем основной результат этой главы, который является третьим основным результатом диссертации.

Теорема 2.1. *Решетка* $\mathbf{L}$ *есть решетка многообразий тогда и только тогда, когда она двойственно изоморфна решетке конгруэнций некоторого ET-моноида.*

Во втором параграфе приводятся предварительные результаты о решетках многообразий.

В третьем параграфе изучаются основные свойства гомоморфных образов ET-моноидов, термов типа f_a и порождающие ET-моноидов.

Используя свойства конгруэнций ET-моноидов, в четвертом параграфе приводится доказательство следующей теоремы

Теорема 2.2. *Для любого ET-моноида* $\mathbf{M}$ *существует многообразие алгебр* $\mathcal{V}$ *такое, что решетка конгруэнций* $\operatorname{Con}\mathbf{M}$ *двойственно изоморфна решетке многообразий* $Lv(\mathcal{V})$.

В пятом параграфе по произвольному многообразию строится ET-моноид и доказывается

Теорема 2.3. *Пусть* $\mathcal{V}$ *– многообразие алгебр. Тогда решетка многообразий* $Lv(\mathcal{V})$ *двойственно изоморфна решетке конгруэнций некоторого ET-моноида.*

Объединяя Теоремы 2.2 и 2.3, мы получим Теорему 2.1.

Так как в определении ET-моноида все полиномы определялись рекурсивно, то из доказательства Теоремы 2.1 мы получаем

Следствие 2.4. *Эквациональная теория разрешима тогда и только тогда, когда в соответствующем ей ET-моноиде разрешима проблема равенства слов .*

3. ГЛАВА 3. Проблема Биркгоффа-Мальцева: решетки квазимногообразий

В этой главе исследуется сложность строения решеток квазимногообразий алгебр на примере решеток квазимногообразий точечных абелевых групп.

В первом параграфе главы приводятся основные определения и известные свойства точечных абелевых групп и квазимногообразий точечных абелевых групп.

Во втором параграфе описываются все квазикритические точечные абелевы группы в терминах прямых произведений точечных циклических групп. Используя это описание, в третьем параграфе доказывается следующая основная техническая лемма

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathcal{L}$ *— множество конечных решеток. Тогда существует квазимногообразие точечных абелевых групп* $\mathcal{R}$*, такое что решетка* $\prod\{S_\wedge(L) \mid L \in \mathcal{L}\}$ *является гомоморфным образом решетки* $Lq(\mathcal{R})$.

В четвертом параграфе этой главы приводится доказательство теоремы, входящей в список основных результатов диссертации.

Напомним, квазимногообразие $\mathcal{R}$ называется *Q-универсальным*, если любая решетка квазимногообразий является гомоморфным образом некоторой подрешетки решетки $Lq(\mathcal{R})$. Эта мера сложности решеток квазимногообразий была предложена М.Сапиром в 1985 году.

Теорема 3.2. *Решетка квазимногообразий всех точечных абелевых групп Q-универсальна.*

Доказательство теоремы непосредствено следует из Леммы 3.1.

Отметим, что решетка квазимногообразий всех абелевых групп является дистрибутивной, следовательно, не является Q-универсальной.

В параграфе 5 вводится новая мера сложности строения решеток - иррациональность. Доказывается, что иррациональные решетки существуют среди решеток квазимногообразий точечных абелевых групп.

Решетка $\mathcal{L}$ называется *иррациональной*, если множество всех ее конечных подрешеток невычислимо. Другими словами, решетка иррациональна, если в ней неразрешима проблема вложимости конечных решеток. Первые такие решетки квазимногообразий были построены автором в [5]. В этом параграфе мы доказываем, что такие решетки существуют среди решеток квазимногообразий точечных абелевых групп.

Теорема 3.3. *Существует квазимногообразие точечных абелевых групп, решетка квазимногообразий которой иррациональна.*

Доказательство основано на Лемме 3.1 и следующем простом критерии иррациональности

Лемма 3.4. *Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{F}$ — множества, причем множество $\mathcal{L}$ вычислимо. Если множество $\mathcal{L} \cap \mathcal{F}$ невычислимо, то и $\mathcal{F}$ также невычислимо.*

Доказательсто теоремы проводится в несколько этапов. Сначала определяется вычислимое множество конечных решеток $\mathcal{L}$. Затем по произвольному подмножеству $\mathcal{S}$ множества $\mathcal{L}$ строится квазимногообразие $\mathcal{R}$ точечных абелевых групп такое, что $\mathcal{L} \cap \mathcal{F} = \mathcal{S}$, где $\mathcal{F}$ есть множество всех конечных подрешеток в $Lq(\mathcal{R})$. Затем взяв в качестве $\mathcal{S}$ невычислимое подмножество множества $\mathcal{L}$, мы попадаем в условия Леммы 3.4, которое и означает иррациональность решетки $Lq(\mathcal{R})$.

Доказательство Теоремы 3.3 позволяет вычислить число таких решеток квазимногообразий и минимальную алгоритмическую сложность невычислимости.

Теорема 3.5. *Существует континуум неизоморфных иррациональных решеток квазимногообразий точечных абелевых групп.*

Теорема 3.6. *Существует иррациональная решетка квазимногообразий точечных абелевых групп с перечислимым множеством конечных подрешеток.*

Следует отметить, что для абелевых групп, в отличие от точечных абелевых групп, не существует квазимногообразия с иррациональной решеткой квазимногообразий.

Далее, используя результат Д. Пигоцци и Дж. Тардоша (1999) о том, что любая коалгебраическая решетка с присоединенной единицей является решеткой многообразий, нетрудно построить иррациональные решетки многообразий.

4. ГЛАВА 4. Стандартные топологические квазимногообразия алгебр

В этой главе диссертации найдены достаточные условия стандартности топологических квазимногообразий алгебр в терминах определимости конгруэнций.

Пусть $\mathbf{A} = \langle A; \sigma \rangle$ – алгебра сигнатуры σ и θ – отношение эквивалентности на A. Положим T_x – множество всех термов сигнатуры σ от счетного числа переменных $x, x_1, x_2, \ldots$ и $F \subseteq T_x$. Определим эквивалентность θ_F следующим образом:

$$(a, b) \in \theta_F \;\Leftrightarrow\; (f(a, c_1, c_2, ...), f(b, c_1, c_2, ...)) \in \theta$$

для любого $f(x, x_1, x_2, ...) \in F$ и всех $c_1, c_2, ... \in A$. Не трудно видеть, что $Syn(\theta) = \theta_{T_x}$ является конгруэнцией. Конгруэнция $Syn(\theta)$ называется *синтаксической* и является наибольшей конгруэнцией, лежащей в эквивалентности θ. Такие конгруэнции впервые были определены в контексте теории формальных языков в работе Сломински в 1974 году и, в контексте топологических алгебр, в работах Чо (1974) и Дэя (1970).

Пусть $F, G \subseteq T_x$. Говорим, что пара (F, G) *определяет синтаксические подконгруэнции* в классе алгебр $\mathcal{R}$, если для любой алгебры $\mathbf{A} \in \mathcal{R}$ и произвольной эквивалентности θ на A имеет место

$$Syn(\theta_G) = (\theta_G)_F.$$

Если множества F, G конечны, то говорим, что (F, G) *конечно определяет синтаксические подконгруэнции* в классе алгебр $\mathcal{R}$. Квазимногообразие алгебр $\mathcal{R}$ имеет *конечно определимые синтаксические подконгруэнции*, если существуют конечные множества $F, G \subseteq T_x$, определяющее синтаксические подконгруэнции в $\mathcal{R}$.

Так как для любой эквивалентности θ на множестве A и $G = \{x\}$ имеет место $\theta = \theta_{\{x\}}$, то свойство "иметь конечно определимые синтаксические подконгруэнции" совпадает с известным свойством "иметь конечно определимые синтаксические конгруэнции".

В первом параграфе пятой главы доказывается следующая теорема, которая является основным результатом этой главы и последним основным результатом диссертации.

Теорема 4.1. *Пусть квазимногообразие* $\mathbf{Q}(\mathbf{A})$*, порожденное конечной алгеброй* $\mathbf{A}$*, является многообразием. Если* $\mathbf{Q}(\mathbf{A})$ *имеет конечно определимые синтаксические подконгруэнции, то топологическое квазимногообразие* $\mathbf{Q}_\tau(\mathbf{A}_\tau)$ *является стандартным.*

Доказательство теоремы основано на двойном применении хорошо известной Леммы об открыто-замкнутых эквивалентностях.

Как было отмечено выше, свойство иметь конечно определимые синтаксические конгруэнции сильнее свойства иметь конечно определимые синтаксические подконгруэнции. Отсюда из теоремы 4.1 в качестве следствия, получаем FDSC-HSP-теорему, доказанную Кларк-Дэви-Фриз-Джексоном в 2003 году.

В последнем параграфе этой главы показано, что если квазимногообразие $\mathcal{R}$ имеет конечно определимые главные подконгруэнции, то $\mathcal{R}$ имеет конечно определимые синтаксические подконгруэнции. Отсюда и Теоремы Бейкера-Ванга в качестве следствия получаем

Следствие 4.2. *Пусть многообразие, порожденное конечной алгеброй* $\mathbf{A}$ *совпадает с квазимногообразием* $\mathbf{Q}(\mathbf{A})$ *и имеет формульно определимые главные подконгруэнции. Тогда топологическое квазимногообразие* $\mathbf{Q}_\tau(\mathbf{A}_\tau)$ *стандартно и конечно аксиоматизируемо.*

Отметим, что стандартность многообразий алгебр с формульно определимыми главными конгруэнциями также следует из FDSC-HSP-теоремы Кларка-Дэви-Фриза-Джексоном.

Согласно Лемме Йонссона любое конечно порожденное конгруэнц-дистрибутивное многообразие является конечно порожденным квазимногообразием. Также в работе Бэйкера-Ванга (2002г) было показано, что конечно порожденное конгруэнц-дистрибутивное многообразие имеет определимые главные подконгруэнции. Следовательно, из следствия 4.2 получаем

Следствие 4.3. *Любое конечно порожденное конгруэнц-дистрибутивное топологическое многообразие алгебр стандартно и конечно аксиоматизируемо.*

Следует отметить, что стандартность конечно порожденных конгруэнц-дистрибутивных топологических многообразий другими способами доказана в работах Кларк-Дэви-Фриз-Джексона (2004г) и Дэви-Джексон-Мароти-МакКензи (2008г).

Выводы

В диссертации получены новые результаты по универсальной алгебре и применениях общей топологии в этой области математики.

Найдены новые классы конечно аксиоматизируемых квазимногообразий алгебр, содержащие в себе многие хорошо известные классы квазимногообразий.

Показано, что проблема исследования решеток многообразий равносильна проблеме исследований решеток конгруэнций обогащенных моноидов специального вида.

Построены решетки квазимногообразий и многообразий, которые не могут быть описаны с помощью конечного числа алгоритмически проверяемых условий.

Найден новый класс стандартных топологических квазимногообразий алгебр.

Список публикаций по теме диссертации

(1) Nurakunov A.M. *Quasivarietities of pointed Abelian groups* [текст]// Algebra and Logic. -2014.- V. **53**. - P. 238-257.

(2) Nurakunov A.M. *Relation Formulas for Protoalgebraic Equality Free Quasivarieties: Palasinska's Theorem Revisited* [текст]/ Nurakunov A.M., Stronkowski M.M.// Studia Logica. -2013.- V. **101**. - P. 827-849.

(3) Nurakunov A. *On Lattices connected with various types of classes of algebraic structures* [текст]/ Nurakunov A. , Semenova M., Zamojska-Dzienio A. // Ученые записки Казанского Университета. -2012.- Т. **154**. - С. 167-178.

(4) Nurakunov A.M. *Complexity of Quasivariety Lattices of Pointed Abelian Groups* [текст]/ Imanaliev M.I. and Nurakunov A.M..// Doklady Mathematics. -2012. - V. **85**. - P. 391-393.

(5) Nurakunov A.M. *Unreasonable lattices of quasivarieties* [текст]// International Journal of Algebra and Computation. -2012.- V. **22**. - P. 1-17

(6) Nurakunov A. *Weak extension property and relative meet semi-distributive quasivarieties* [текст]/ W. Dziobiak. M. Maroti. R. McKenzie and A. Nurakunov. // Fundamenta Mathematicae. -2009.- V. **202**. - P. 199-223.
(7) Nurakunov A.M. *Notice on relative weak extension property* [текст]// Academic Review. -2009.- V. **2**. - P. 205-208.
(8) Nurakunov A.M. and M.M. Stronkowski. *Quasivarieties with definable relative principal subcongruences* [текст]/ Nurakunov A.M., Stronkowski M.M.// Studia Logica. -2009.- V. **22**. - P. 1-14.
(9) Nurakunov A.M. *Equational theories as congruences of enriched monoids* [текст]// Algebra Universalis. -2008.- V. **58**. - P. 357-372.
(10) Nurakunov A.M. *Finite lattices as lattices of relative congruences of finite algebras* [текст]// Algebra Universalis.-2007.- V. **57**. - P. 207-214.
(11) Nurakunov A.M. *Locally finite modular varieties of finite diameter* [текст]/ C. Herrmann. Nurakunov A.M. // Order. - 2007.- V. **24**. - P. 31-37.
(12) Nurakunov A.M. *Quasivarieties generated by two-elements algebras revisited* [текст]// Analitic and approximate methods. Proceedings of International Conference at Kyrgyz-Russian-Slavic Univ.. Kyrgyzstan. -2003.- Shaker-Verlag. - P. 171-184.
(13) Nurakunov A.M. *Finite lattices as lattices of relative congruences of finite unars and Abelian groups* [текст]// Algebra and Logic. -2001.- V. **40**. - P. 283-289.
(14) Nurakunov A.M. *Quasi-identities of congruence-distributive quasivarieties of algebras* [текст]// Siberian Mathematical Journal. -2001.- V. **42**. - P. 108-118.
(15) А.М. Нуракунов. *Топологические квазимногообразия алгебр с конечно определимыми синтаксическими подконгруэнциями* [текст]// Доклады НАН КР. -2016.- Т. 7. - С. 9-12.

Нуракунов Анвар Мухпарович «Чектүү аксиоматизациялоо, көп түспөлдүксымалдардын жана алгебралардын топологиялык көп түсполдүксымалдардын торчолору» темада 01.01.04 - Геометрия жана топология, 01.01.06 - Математикалык логика, алгебра жана сандардын теориясы адистиги боюнча физика жана математика илимдеринин докторы илимий даражасын алууга талаптанып жазылган диссертациясынын

Резюмеси

Негизги сөздөр: алгебра, алгебралардын көп түспөлдүгү, алгебралардын көп түспөлдүксымалы, алгебралардын топологиялык көп түспөлдүксымалы, торчо, чектүү аксиоматизациялоонун проблемасы, Биркгофф-Мальцевдин проблемасы, стандартылык проблемасы.

Изилдөө обьектиси: Алгебралардын конгруэнцияларынын торчолоруна коюлган түрд үү касиеттерине ээ болгоналгебралардын көп түспөлдүксымалдары.

Изилдөөнүн ыкмалары: Диссертациялык иштин максаты катары көп түспөлдүксымалдардын түрдүү класстарынын алардын топологиялык көп түспөлдүксымалдарын чектүү аксиоматизациялоосун, ошондой эле алгебралардын көп түспөлдүксымалдарын торчолорунун түзүлүшүүсүнүн татаалдыгын изилдөөсү болуп салынат.

Изилдөөнүн методдары: Математикалык логиканын, моделдерин теорияларынын, рекурсивдүү функцияларынын жана жалпы топологиянын методдоруна таанган универсалдык алгебранын методдору.

Алынган жыйынтыктар жана жаңылыктар: Алгеблардын түрдүү класстарынын чектүү аксиоматизациялоонун зарыл жана жетиштүү шарттары аныкталган. Чектүү точолордун кийиштирүүс үнүн чечлгиз проблемасы менен байланыштүү болгон көп түспөлдүксымалдардын торчолору түзүлгөн. Алгеблардын топологиялык көп түспөлдүксымалдардын стандарт тулугунун зарыл шарттары аныкталган. Бардык негизги натыйжалары жаныдан алынган.

Пайдалануу даражасы жана колдонуу чөйрөсү: Ищтин нойыйжалары колдонууда жана универсалдык алгебранын, торчолордун теорияларын, математикалык логиканын, ошондой эле моделдердин жана жалпы топологияда түрдүү объектерин изилдөөжүргүзүүдөпайдаланылса болот.

Резюме

докторской диссертации Нуракунова Анвара Мухпаровича «Конечная аксиоматизируемость, решетки квазимногообразий и топологических квазимногообразий алгебр» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальностиям 01.01.04 - Геометрия и топология, 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Ключевые слова: алгебра, многообразие, квазимногообразие, топологическое квазимногообразие, решетка, порблема конечной аксиоматизируемости, проблема Биркгоффа-Мальцева, проблема стандартизации.

Объект исследования: Квазимногообразия алгебр с различными свойствами решеток конгруэнций алгебр.

Цель исследования: Целью диссертационной работы является исследование конечной аксиоматизируемости различных классов квазимногообразий алгебр, решеток многообразий, сложности строения решеток квазимногообразий алгебр и стандартности топологических квазимногообразий алгебр.

Методы исследования: Методы Универсальной алгебры и теории решеток с использованием методов математической логики, теорий моделей, теории алгоритмов и общей топологии.

Полученные результаты и новизна. Найдены необходимые и достаточные условия конечной аксиоматизируемости различных классов алгебр. Найдено представление решеток многообразий в виде решеток конгруэнций обогащенных моноидов. Построены решетки квазимногообразий с неразрешимой проблемой вложимости конечных решеток. Найдены достаточные условия стандартности топологических квазимногообразий алгебр. Все основные результаты являются новыми.

Степень использования и область применения. Результаты работы используются и могут быть использованы при иследовании различных обьектов универсальной алгебры, теорий решеток, математической логики,теорий моделей и общей топологии.

Summary

Nurakunov Anvar Muhparovich «Finite axiomatizability, lattices of quasivarieties and topological quasivarieties of algebras». The phisical and mathematical doctor"s thesis in 01.01.04 - Geometry and topology, 01.01.06 - Mathematical logic, algebra and number theory.

Key words: algebra, variety, quasivariety, topological quasivariety, lattice, finite basis problem, Birkhoff-Maltsev problem, standartization problem.

Objects of studies. Quasivarieties of algebras with different properties on congruences lattices of algebras.

Aim of studies. The main purpose of the dissertation is to study of finitely based quasivarieties, variety lattices, complexity of quasivariety lattices and standart topological quasivarieties.

Methods. Universal algebra and lattice theory methods were used. Mathematical logic, model theory, algorithmoc theory and topology methods were used too.

The results and novelty. Necessery and sufficient conditons for being finitely based quasivariety were found for different classes. The representation of variety lattices by congruence lattices of enriched monoids were found. It was constructed quasivariety lattice with undecidable membership problem. Sufficient conditions for being standart topological quasivariety were found. All main results are new.

The applications. The results of dissertation were used and use in stydies of different areas of universal algebra, lattice theory, mathematical logic, model theory and general topology.