НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж. БАЛАСАГЫНА

На правах рукописи

УДК 517.968

Аскар кызы Лира

КОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Специальность
01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Бишкек – 2018

Работа выполнена в лаборатории вычислительной математики Института математики НАН Кыргызской Республики

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Кененбаева Г.М.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Алыбаев К.С.**

доктор физико-математических наук,
профессор **Асанов А.**

Ведущая организация: **Ошский технологический университет им. академика М.М.Адышева**
Адрес: г. Ош, ул. Исанова 81.

Защита диссертации состоится «25» июня 2018 г. в 14.00 часов на заседании Диссертационного совета Д 01.17.560 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус № 6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а, и на сайте ИМ http://math.aknet.kg

Автореферат опубликован «_____ » ______________2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н.,
профессор Байзаков А.Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. В настоящее время многие разделы математики успешно изучаются в рамках теории категорий, поскольку она рассматривает свойства отношений между математическими объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов. В Кыргызстане первые результаты по категорной алгебре получил М.Я.Медведев, ряд результатов по категорной топологии был получен академиком А.А.Борубаевым, А.А.Чекеевым и их учениками. Вместе с тем, с категорной точки зрения не изучалось такое важное понятие, как уравнение. Поэтому целью настоящей работы является формулировка основных понятий, объектов и морфизмов категории уравнений и ее подкатегорий, установление ее связей с другими категориями и применение этих результатов к расширению класса корректных интегральных уравнений первого рода. При этом используется выявленный в Кыргызстане эффект аналитичности. Поскольку многие обратные задачи описываются интегральными уравнениями первого рода, данная тематика является актуальной.

Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими работами. Диссертация выполнена в рамках проекта по Институту математики НАН КР: «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, топологических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизационных экономических задач и в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений» (2015-2017) № госрегистрации 0007125. Результаты работы включены в заключительный и промежуточные отчеты по этому проекту.

Цель и задачи исследования:

Построить категорию уравнений, с ее объектами и морфизмами и ее подкатегории, включающие в себя как известные типы задач для различных уравнений, так и новые типы математических задач, с использованием эффекта аналитичности найти морфизмы, расширяющие класс корректных интегральных уравнений первого рода.

Методы исследования.

Применяются методы теории категорий, используется эффект аналитичности, выявленный в Институте математики НАН Кыргызской Республики, применяются метод преобразования уравнений, метод преобразования решений, метод преобразования аргумента, методы аналитических функций, теории интегральных уравнений, теории линейных операторов, вычислительные методы, понятие энтропии.

Научная новизна работы.

Введено новое общее понятие уравнения и построена категория уравнений, с ее объектами и морфизмами и ее подкатегории, включающие в себя как известные типы задач для различных уравнений, так и новые типы математических задач. Выдвинута и подтверждена гипотеза об энтропии в математических моделях процессов, связанных с передачей энергии. На основе использования эффекта аналитичности построены новые классы корректных линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода с одной, двумя и многими переменными, нелинейных уравнений Гаммерштейна, являющихся корректными в соответствующих пространствах функций, построены приближенные методы для их устойчивого решения. Построены компьютерные программы для устойчивого построения приближенных решений некоторых типов таких уравнений. Обнаружено явление ограниченной вычислительной устойчивости по параметру - шагу сетки.

Теоретическая значимость и практическая ценность.

Настоящая работа носит теоретический характер и ее результаты могут способствовать категоризации теории динамических систем, найти применение в общей теории обратных и некорректных задач, в теории интегральных уравнений, способствовать разработке новых методов построения приближенных решений корректных задач. Полученные результаты можно использовать для построения приближенного решения обратных задач математической физики. Построенное программное обеспечение с соответствующими модификациями можно использовать для приближенного решения различных интегральных уравнений первого рода, причем обнаруженное явление ограниченной вычислительной устойчивости будет косвенно подтверждать корректность таких уравнений.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

Новое общее понятие уравнения и уравнения с параметром;

Построение элементов категории уравнений, с ее объектами и морфизмами и ее подкатегорий, включающих в себя как известные типы задач для различных уравнений, так и новые типы математических задач;

Гипотеза о том, что обратные задачи к математическим задачам, описывающим увеличение математического аналога энтропии в ограниченном (компактном) объекте, являются некорректными;

Построение экспонент дифференциальных операторов в частных производных, дающих решения многомерного уравнения теплопроводности с обратным временем;

Построение классов интегральных линейных уравнений и нелинейных уравнений Гаммерштейна первого рода, являющихся корректными в некоторых классах аналитических функций;

Построение классов линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода для функций нескольких переменных, являющихся корректными в некоторых классах аналитических функций;

Построение программного обеспечения для устойчивого решения линейных интегральных уравнений первого рода с одной и двумя независимыми переменными.

Личный вклад соискателя.

Цели и задачи исследования диссертационной работы определены научным руководителем Г.М. Кененбаевой. В диссертацию включены материалы, которые принадлежат автору.

Апробация работы

Результаты исследования докладывались на следующих конференциях:

- Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики-2015», посвященная 90-летию со дня рождения академика Г. И. Марчука, Новосибирск, октябрь 2015.
- Международная научная конференция «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике», посвященная 80-летию академика М. Иманалиева, Бишкек (сентябрь 2016);
- III Международная научная конференция "Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений", приуроченная к юбилею профессора А. Керимбекова, Бишкек (июнь 2017).

Публикации по теме диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1-8], приведенных в конце автореферата. В совместных статьях [1-2] постановка задачи и обсуждение результатов принадлежат научному руководителю, в совместной статье [5] постановка задачи принадлежит научному руководителю, обсуждение результатов - соавтору, во всех статьях - доказательство теорем, следствий и построение примеров - автору.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, четырех глав, выводов, списка использованных источников из 130 наименований, и приложений - программ и результатов расчетов, всего 97 страниц текста. Нумерация разделов – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела в главе, третья – на порядковый номер в разделе.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук Кененбаевой Гулай Мекишовне за постановку задачи, постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

Краткое содержание диссертации.

Используются обозначения: $Ob(K)$ - объекты категории K; $Mor(K)$ - морфизмы категории K;

A_v (для $v>0$) – пространство целых аналитических функций экспоненциального типа с показателем v, то есть удовлетворяющих условию: $(\forall f(z)\in A_v)$ $(\exists c>0)$ $(\forall z\in C)(\,|f(z)| < c\, e^{v|z|})$, с нормой $||f||_v := sup\{|f(z)|\, e^{-v|z|}: z\in C\}$.

A_{+v} – пространство целых аналитических функций $f(z)$ таких, что в некоторой точке (можно принять – в начале координат) последовательность их производных имеет скорость роста не выше степенного: $(\forall f(z)\in A_{+v})$ $(\exists c>0)$ $(\forall k\in N_0:=\{0,1,2,3\ldots\})(\,|f^{(k)}(0)| \le cv^k)$,с нормой $||f||_{+v} := sup\{|f^{(k)}(0)|\, v^{-k}: k\in N_0\}$.

В первой главе приведены обзор работ, примыкающих к данной работе, и дополнительные результаты, используемые в работе. Описано обнаружение эффекта аналитичности, на основе которого получены результаты данной работы. Проведен обзор результатов по понятию энтропии, из которого сделан вывод, что ранее не были выдвинуты общие предположения о связи математических аналогов энтропии со свойствами уравнений.

Во второй главе вводится категория уравнений *Equa: Ob(Equa)* - наборы $\{ X, Y \in Ob(Set)$, предикат $P(x)$ на X, преобразование $B{:}X\to Y\}$. Решение уравнения $\{X, Y, P, B\}$ - такое $y\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x)\wedge(y=B(x))$. *Mor(Equa)* - это такие преобразования наборов $\{X, Y, P, B\}$, что решения сохраняются. Предлагаются следующие подкатегории категории *Equa:*

- категория уравнений *Equa-Top* с непрерывными обобщенными предикатами *Ob(Equa-Top)* - наборы $\{ X, Y \in Ob(Top)$, функция $P(x)$ на X, принимающая конечный набор значений, из них одно выделенное «истина», преобразование $B{:}X\to Y\}$, при условии, что при непрерывном переходе в X по функция $P(x)$ меняет значения только на соседние*};*

- категория уравнений с параметрами *Equa-Par*. *Ob(Equa-Par)* - наборы {непустые множества X, F, Y, предикат $P(x,f)$ на $X\times F$, преобразование $B{:}X\to Y\}$.

Решением уравнения $\{X, F, Y, P, B\}$ для любого $f\in F$ будем называть такое $y(f)\in Y$, что $(\exists x\in X)(P(x,f)\wedge(y=B(x))$.

- категория корректных уравнений с параметрами *Equa-Par-Top: Ob(Equa-Par-Top)* - наборы $\{X, F, Y \in Ob(Top)$, предикат $P(x,f)$ на $X\times F$, непрерывное преобразование $B{:}X\to Y\}$. При этом 1) $(\forall f\in F)(\exists! y\in Y)(\exists x\in X)(P(x,f)\wedge(y=B(x))$;
2) значение y непрерывно зависит от значения f.

Выдвинута

Г и п о т е з а. Если задача для поиска объекта в бесконечном множестве является математической моделью процесса с увеличением величины, соответствующей энтропии, и ограниченным объемом свободной энергии, то обратная задача является некорректной.

Поскольку интегральный оператор с непрерывным ядром на ограниченном отрезке является вполне непрерывным, интегральное уравнение первого рода с таким ядром не может быть корректным. Следовательно, нужно вести поиск корректных интегральных уравнений первого рода на неограниченных областях. Это подтверждено в диссертации.

Далее, исходя из известной формулы

$$u(t,x) = exp(at\Delta)\varphi(x) = \frac{1}{\left(2\sqrt{Ta\pi}\right)^n}\int_{\boldsymbol{R}^n} exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4aT}\right)\varphi(\xi)d\xi \tag{0.1}$$

для решения уравнения теплопроводности вида

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -a\Delta u(t,x), (t,x)\in\boldsymbol{R}_{++}\times\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}},\ a>0 \tag{0.2}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = \varphi(x), x\in\boldsymbol{R}^n, \tag{0.3}$$

где $\varphi(z)\in A_{n+v}$ и принимает вещественные значения при вещественных значениях аргумента,
доказана

Т е о р е м а 0.1. Если функция $f(x):\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ - целая аналитическая экспоненциального типа по своим переменным с вещественными коэффициентами, то существует такое же целое аналитическое решение

$$w(x) = J_n{}^{-1}(x; f(s): s) = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} exp\left(-\frac{1}{4b}\Delta\right) f(x)$$

интегрального уравнения первого рода

$$J_n(x; w(s): s) := \int_{\boldsymbol{R}^n} exp(-b|x-\xi|^2) w(\xi) d\xi = f(x). \qquad (0.4)$$

Оно устойчиво по $f(x)$ в пространстве A_{n+v}.

В третьей главе рассмотрено уравнение

$$J(x; w(s): s) := \int_{-\infty}^{\infty} exp(-b(x-\xi)^2) w(\xi) d\xi = f(x), \qquad (0.5)$$

с решением

$$w(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} exp\left(-\frac{1}{4b}\frac{d^2}{dx^2}\right) f(x), \qquad (0.6)$$

а также уравнения, полученные преобразованиями из него. Эти преобразования можно рассматривать, как морфизмы в категории *Equa-Par-Top*.

Т е о р е м а 0.2. Если $(\forall x\in \boldsymbol{R})(f(x)\in\boldsymbol{R}_{++})$; $(\forall k\in\boldsymbol{N})(|f^{(2k)}(x)|\le 2bk\,|f^{(2k-2)}(x)|)$, то решение уравнения (0.4) положительно.

Т е о р е м а 0.3. Если $f(x) = a + \sum_{j=1}^{m} b_j\, cos\left(g_j x + h_j\right)$, $a > 0$, и $\sum_{j=1}^{m}|b_j| exp\left(\frac{1}{4b} g_j{}^2\right) < a$, то решение уравнения (0.5) положительно.

С использованием формулы

$$J^{-1}(x; s^{2m+q}: s) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (2m+q)!}{k!(4b)^k (2m-2k+q)!} x^{2m-2k+q}$$ доказана

Т е о р е м а 0.4. Если правая часть уравнения (0.5) представима в виде суммы экспонент, гиперболических функций *sh* и *ch*, тригонометрических функций *sin* и *cos* и многочленов, то это уравнение имеет решение и оно представимо в таком же виде.

Также с использованием формулы (0.6) в качестве примера найдено:

$$J^{-1}(x; e^s s: s) = \sqrt{\frac{b}{\pi}}\, e^x\, exp\left(-\frac{1}{4b}\right)\left(x - \frac{1}{2b}\right).$$

Преобразование решения: в уравнении

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, w(\xi)) d\xi = f(x) \qquad (0.7)$$

делается подстановка $w(x)= W(x, u(x))$, и вводится обозначение $K_1(x, \xi, u) \coloneqq K\left(x, \xi, W(\xi, u)\right)$, получается интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x, \xi, u(\xi)) d\xi = f(x), \qquad (0.8)$$

которое является корректным, если (0.7) - корректное.

Преобразование аргумента. В уравнении (0.7) сделаем подстановку $\xi = H(\eta)$, где функция $H(\eta)$ - аналитическая, вещественная и возрастающая для

$x \in \boldsymbol{R}$, $H(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}$, введем новую неизвестную функцию $u(\eta) = w(H(\eta))$ и функцию $K_3(x, \eta, u) \coloneqq K(x, H(\eta), u)H'(\eta)$. Тогда получаем уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_3(x, \eta, u(\eta))d\eta = f(x), \tag{0.9}$$

которое является корректным, если (0.7) - корректное.

Композиция интегральных ядер. Если интегральные уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, w(\xi))d\xi = f(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} M(x, \xi, w(\xi))d\xi = f(x)$$

являются корректными в некотором классе аналитических функций, то уравнение $\int_{-\infty}^{\infty} K\left(x, \xi, \int_{-\infty}^{\infty} M(\xi, \eta, w(\eta))d\eta\right)d\xi = f(x)$ также является корректным в этом классе аналитических функций. Таким способом доказана

Т е о р е м а 0.5. Если $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, то линейное интегральное уравнение вида (0.5), но с ядром вида

$$H(x, \xi) = exp(-b(x - \xi)^2)(\alpha + \beta(ux + v\xi) + \gamma(ux + v\xi)^2)$$

является корректным в классе положительных аналитических функций.

Корректность уравнений с интегральными ядрами, представимыми в виде сумм. Если $|\lambda|$ достаточно мало, то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(exp(-b_1(x - \xi)^2) + \lambda exp(-b_2(x - \xi)^2)\right)w(\xi)d\xi = f(x). \tag{0.10}$$

является корректным, наряду с (0.4).

Построен алгоритм для приближенного решения таких уравнений. Обнаружено явление ограниченной вычислительной устойчивости по параметру - шагу сетки.

Т е о р е м а 0.6. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq \boldsymbol{0}$, $f_1(x), f_2(x)$ - аналитические функции, то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{11}(x - \xi) & K_{12}(x - \xi) \\ K_{21}(x - \xi) & K_{22}(x - \xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(\xi) \\ w_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \tag{0.11}$$

где $K_{jk}(x) = a_{jk} \exp\left(-b_j x^2\right), j, k = 1, 2,\ b_j > 0$, является корректным и имеет решение.

П р и м е р. Векторно-матричное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 2exp(-(x - \xi)^2) & 5exp(-2(x - \xi)^2) \\ exp(-(x - \xi)^2) & 3exp(-2(x - \xi)^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(\xi) \\ w_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} x^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

имеет решение $w_1(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}(3x^2 - 6.5);\ w_2(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}(1.5 - x^2)$.

Т е о р е м а 0.7. Если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq \boldsymbol{0}$, $f_k(x), k = 1..m$ - целые аналитические функции экспоненциального типа, то уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} K_{11}(x - \xi) & K_{12}(x - \xi) & \ldots & K_{1m}(x - \xi) \\ K_{21}(x - \xi) & K_{22}(x - \xi) & \ldots & K_{2m}(x - \xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{m1}(x - \xi) & K_{m2}(x - \xi) & \ldots & K_{mm}(x - \xi) \end{pmatrix} \times$$

$\times colon\big(w_1(\xi), \dots, w_m(\xi)\big)d\xi = colon\big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big)$,
где $K_{jk}(x) = a_{jk}\exp(-b_k x^2)\,, j, k = 1 \dots m,\; b_k > 0,$ является корректным и имеет решение.

В четвертой главе рассмотрено уравнение

$$J_2(x_1, x_2; w(s_1, s_2){:}\, s_1, s_2) := \\ := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-b\left(\left(x_1 - \xi_1\right)^2 + \left(x_2 - \xi_2\right)^2\right)\right) w(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 = \\ = f(x_1, x_2), \quad (0.12)$$

а также связанные с ним. При помощи преобразований, аналогичных преобразованиям Главы 3, получены новые классы корректных уравнений.

Рассмотрено уравнение с общей квадратической функцией (с заменой обозначений (0.12)):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp\big(-K(x, y, p, q)\big) w(p, q)\, dp dq = f(x, y), \quad (0.13)$$

$$K(x, y, p, q) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xp + 2a_{14}xq + a_{22}y^2 + 2a_{23}yp + \\ + 2a_{24}yq + a_{33}p^2 + 2a_{34}pq + a_{44}q^2. \quad (0.14)$$

Для приведения этого уравнения к виду (0.12) применим линейные преобразования: *x=AX+BY*, *y=CX+DY*, *p=KP+LQ;* *q=MP+NQ*. Получена система

$a_{11}A^2 + 2a_{12}AC + a_{22}C^2 = 1, a_{11}B^2 + 2a_{12}BD + a_{22}D^2 = 1,$

$a_{11}AB + a_{12}(AD + BC) + a_{22}CD = 0,\; a_{33}K^2 + 2a_{34}KM + a_{44}M^2 = 1,$

$a_{33}L^2 + 2a_{34}LN + a_{44}N^2 = 1, a_{33}KL + a_{34}(KN + LM) + a_{44}MN = 0,$

$A(a_{13}K + a_{14}M) + C(a_{23}K + a_{24}M) = -1,$

$B(a_{13}K + a_{14}M) + D(a_{23}K + a_{24}M)\; = 0,$

$B(a_{13}L + a_{14}N) + D(a_{23}L + a_{24}N) = -1,$

$A(a_{13}L + a_{14}N) + C(a_{23}L + a_{24}N)\; = 0.$

Доказана

Т е о р е м а 0.8. По заданным $a_{13}, a_{24}, a_{14}, a_{23}$, удовлетворяющим условию $a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23} \neq 0$, можно найти соответствующим алгоритмом такие a_{11}, a_{12}, a_{22}, не все равные нулю, и a_{33}, a_{34}, a_{44}, не все равные нулю, что уравнение вида (0.13)-(0.14) приводится к виду (0.12).

Таким образом, существуют нетривиальные ядра вида (0.14), дающие корректные уравнения.

Т е о р е м а 0.9. Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq \mathbf{0}$, функции $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ - целые аналитические экспоненциального типа по каждой из переменных, то существует целое аналитическое решение интегрального уравнения первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix} K_{11}(x-\xi,y-\eta) & K_{12}(x-\xi,y-\eta) \\ K_{21}(x-\xi,y-\eta) & K_{22}(x-\xi,y-\eta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1(\xi,\eta) \\ w_2(\xi,\eta)\end{pmatrix} d\xi\, d\eta =$$

$$=\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y)\end{pmatrix}, \qquad (0.15)$$

где $K_{jk}(x,y) = a_{jk}\exp(-b_k x^2 - c_k y^2)\,, j,k = 1,2,\ b_k, c_k > 0,$ оно является корректным.

Также рассмотрено общее уравнение (0.4) в развернутом виде

$$J_n(x_1,x_2,\dots,x_n; w(s_1,s_2,\dots,s_n): s_1,s_2,\dots,s_n) :=$$

$$:= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-b\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\xi_i\right)^2\right) w\left(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\right) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n =$$

$$= f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,. \qquad (0.16)$$

Т е о р е м а 0.10. Если $n{\times}n$-матрицы $U=\{u_{kj}: k,j=1..n\}$, $V=\{u_{kj}: k,j=1..n\}$ - невырожденные, то уравнение вида (0.16) с ядром

$$exp\left(-b\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}u_{kj}x_j - \sum_{j=1}^{n}v_{kj}\xi_j\right)^2\right)$$

является корректным.

В конце диссертации приведены выводы, отражающие новизну полученных результатов и возможности их теоретических и практических применений.

В приложениях приведены программы с подпрограммами на языке pascal и результаты расчетов.

Публикации по теме диссертации:

1. Аскар кызы Л. Класс интегральных уравнений первого рода, имеющих решение при любой правой части [Текст] / Г.М.Кененбаева, Л. Аскар кызы // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Г. И. Марчука, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. - Новосибирск: Абвей, 2015. - С. 321-325. (РИНЦ)
2. Аскар кызы Л. Эффекты и явления в теории динамических систем [Текст] / Г.М.Кененбаева, Л. Аскар кызы // Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке. Материалы международной научно-практической конференции. – Алматы: КазНПУ имени Абая, 2015. - С. 340-343.
3. Аскар кызы Л. Поиск эффектов [Текст] / Л. Аскар кызы // Вестник КРСУ. Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Том 1, Бишкек, 2013. – С. 187 -191.
4. Аскар кызы Л. Условия существования положительных решений линейных интегральных уравнений первого рода [Текст] / Л. Аскар кызы // Вестник ЖАГУ, 2016, № 1(32). – С.24-29.

5. Аскар кызы Л. Классификации применения компьютеров в математических исследованиях [Текст] / Г.М.Кененбаева, Т.Дж.Касымова, Л. Аскар кызы // Проблемы современной науки и образования, 2016, № 1(63). - Иваново: изд. Олимп. – С. 23-30. (РИНЦ)
6. Аскар кызы Л. Корректность решения двумерного интегрального уравнения первого рода с аналитическими функциями [Текст] / Л. Аскар кызы // Проблемы современной науки и образования, 2016, № 21(63). - Иваново: изд. Олимп. – С. 6-9. (РИНЦ)
7. Аскар кызы Л. Корректность интегральных уравнений первого рода типа Гаммерштейна с аналитическими функциями [Текст] / Л. Аскар кызы // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017, № 5. - С. 78-80.
8. Аскар кызы Л. Численные эксперименты для выявления эффекта аналитичности [Текст] / Г.М.Кененбаева, Л. Аскар кызы // Проблемы современной науки и образования, 2017, № 9(91). - Иваново: изд. Олимп. – С. 44-47. (РИНЦ)

Аскар кызы Лиранын 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн “Биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелер үчүн корректтүү маселелер” деген темада диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: категория теориясы, морфизм, биринчи түрдөгү интегралдык теңдеме, аналитикалык функция, корректтүү, теңдемелерди өзгөртүп түзүү, чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү, аргументти өзгөртүп түзүү
.

Изилдөөнүн объектиси: биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелер.

Изилдөөнүн максаты: теңдемелер категориясынын, анын объектилери жана морфизмдери менен жана анын ар кандай теңдемелер үчүн белгилүү типтеги маселелерди, ошондой эле жаңы типтептеги математикалык маселелерди кармаган камтылган категориясынын элементтерин тургузуу, аналитикалык кубулушту колдонуу менен биринчи түрдөгү корректтүү интегралдык теңдемелер классын кеңейтүүчү морфизмдерди табуу.

Изилдөөнүн усулдары. Категория теориясынын ыкмалары колдонулат, Кыргыз Республикасынын УИАсынын математика Институтунда алынган аналитикалык кубулушу пайдаланылат, теңдемелерди өзгөртүп түзүү ыкмасы,чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү ыкмасы, аргументти өзгөртүп түзүү ыкмасы, аналитикалык функциялардын ыкмасы, интегралдык теңдемелер теориясы, сызыктуу операторлор теориясы, эсептөө ыкмалары, энтропия түшүнүгү колдонулат.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы. Жаңы жалпы теңдеме түшүнүгү киргизилген жана теңдемелер категориясынын элементтери, анын объектилери жана морфизмдери менен жана анын ар кандай теңдемелер үчүн белгилүү типтеги маселелерди, ошондой эле жаңы типтеги математикалык маселелерди кармаган камтылган категориясы тургузулган.

Аналитикалуучулугу эффектисин пайдалануунун негизинде бир, эки жана көп өзгөрмөлүү функциялар үчүн биринчи түрдөгү корректтүү интегралдык теңдемелердин жаңы классы, туура келүүчү функциялар мейкин-дигинде корректтүү болуп эсептелген Гаммерштейндин сызыктуу эмес теңде-меси тургузулган. Алардын туруктуу чыгарылышы үчүн жакындаштырылган ыкмалары тургузулган. Мындай теңдемелердин кээ бир типтеринин жакындаштырылган чыгарылыштарынын туруктуулугу үчүн компьютердик программалар түзүлгөн.

Торчодогу кадам - параметри боюнча чектелген эсептөө туруктуулугу кубулушу табылган.

Колдонуу аймагы. Математикалык физиканын тескери маселелеринин, биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелердин жакындаштырылган чыгарылыштарын тургузуу.

РЕЗЮМЕ

диссертации Аскар кызы Лиры на тему: «Корректные задачи для интегральных уравнений первого рода» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: теория категорий, морфизм, интегральное уравнение первого рода, аналитическая функция, корректность, преобразование уравнений, преобразование решений, преобразование аргумента.

Объект исследования: интегральные уравнения первого рода.

Цель работы: Построить элементы категории уравнений, с ее объектами и морфизмами и ее подкатегорий, включающих в себя как известные типы задач для различных уравнений, так и новые типы математических задач, с использованием эффекта аналитичности найти морфизмы, расширяющие класс корректных интегральных уравнений первого рода.

Методика исследования: Применяются методы теории категорий, используется эффект аналитичности, выявленный в Институте математики НАН Кыргызской Республики, применяются метод преобразования уравнений, метод преобразования решений, метод преобразования аргумента, методы аналитических функций, теории интегральных уравнений, теории линейных операторов, вычислительные методы, понятие энтропии.

Научная новизна: Введено новое общее понятие уравнения и построены элементы категории уравнений, с ее объектами и морфизмами и ее подкатегорий, включающие в себя как известные типы задач для различных уравнений, так и новые типы математических задач. На основе использования эффекта аналитичности построены новые классы корректных линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода с одной, двумя и многими переменными, нелинейных уравнений Гаммерштейна, являющихся корректными в соответствующих пространствах функций, построены приближенные методы для их устойчивого решения. Построены компьютерные программы для устойчивого построения приближенных решений некоторых типов таких уравнений. Обнаружено явление ограниченной вычислительной устойчивости по параметру - шагу сетки.

Область применения: Построение приближенных решений обратных задач математической физики, интегральных уравнений первого рода.

SUMMARY
on the dissertation "Correct tasks for integral equations of the first kind" by Askar kyzy Lira submitted for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: theory of categories, morphism, integral equation of the first kind, analytical function, correctness, transformation of equations, transformation of solutions, transformation of argument.

Object of research: integral equations of the first kind.

Aim of research: Construct elements of the category of equations with its objects and morphisms and its subcategories including known types of tasks for various equations as well as new types of mathematical tasks, with assistance of the effect of analyticity find morphisms extending the class of correct integral equations of the first kind.

Methods of research: there are applied methods of the theory of categories, is used the effect of analyticity revealed at the Institute of mathematics of NAS of Kyrgyz Republic, are applied methods of transformation of equations, of transformation of solutions, of transformation of argument, of analytical functions, of the theory of integral equations, of the theory of linear operators, computational methods, notion of entropy.

Scientific novelty: A new general notion of equation is introduced and elements of the category of equations with its objects and morphisms and its subcategories including known types of tasks for various equations as well as new types of mathematical tasks are constructed. On the base of the effect of analyticity new classes of correct linear and non-linear integral equations of the first kind with one, two and many variables, of Hammerstein non-linear equations being correct in corresponding spaces are constructed, approximate methods for their stable solving are developed. A phenomena of bounded computational stability by the step of network as a parameter is revealed.

Field of application: Constructing of approximate solutions of equations of mathematical physics, of integral equations of the first kind.

На печать 23.05.18 г. Бумага офсетная.
Формат бумаги 60х84/16 Объем 2,05 п.л.
Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии «Турар»
720031, г. Бишкек, ул. Горького, 1.