НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. ЖУСУПА БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.15.513

На правах рукописи
УДК 517.968

Каденова Зууракан Ажимаматовна

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

01.01.02 –дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Бишкек– 2016

Работа выполнена в Кыргызско-Узбекском университете

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор **Асанов Авыт**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент НАН КР
Алымкулов Келдибай
(Ошский государственный университет,
Кыргызстан)

доктор физико-математических наук,
профессор **Ягола Анатолий Григорьевич**
(Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова, Россия)

доктор физико-математических наук,
профессор **Демиденко Геннадий Владимирович**
(Институт математики им. С. Л. Соболева
СО РАН, г. Новосибирск, Россия)

Ведущая организация:
Казахский Национальный Аграрный Университет,
Казакстан, г.Алматы, просп. Абая, 8.

Защита состоится «09»декабря 2016 года в 14-00 часов на заседании диссертационного совета Д.01.12.001 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата физико-математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж.Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, Чуйский проспект 265-а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а., и на сайте ВАК КР: http://www.vak.kg.

Автореферат разослан « » ноября 2016г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор **Искандаров С.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория интегральных и операторных уравнений первого рода как область теории некорректных задач возникла и развивалась в последние шесть десятилетий.

Среди математических задач выделяется класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Задачи подобного типа, принадлежат к классу некорректно поставленных задач.

Актуальность проблемы обусловлена потребностями в разработке новых подходов для регуляризации и единственности решения линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в различных областях.

В настоящее время бурно развивается теория и приложения некорректных задач. Один из классов некорректных задач составляют линейные интегральные уравнения первого рода. К ним приводится большое число прикладных задач, в том числе, задач математической обработки (интерпретации) результатов измерений в физических экспериментах. В качестве приближенных решений таких задач, устойчивых к малым изменениям исходных данных, берется регуляризация решения, т.е. решения получаемые методом регуляризации.

Новое понятие корректности в работах А.Н.Тихонова[4], М.М.Лаврентьева[2] и В.К.Иванова[3], отличное от классического, дало средство для исследования

---

[1] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.

[2] Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. - Новосибирск: Издательство СО АН СССР. - 1962.

некорректных задач и стимулировало интерес к интегральным уравнениям, имеющим большое прикладное значение.

Долгое время математики уходили от обсуждения задач такого типа, считая их лишенными физического смысла. Впервые на примере обратной задачи теории потенциалов, имеющей непосредственное приложение в геофизике, А.Н.Тихонов[6], переосмыслив известные требования Адамара[1], предъявляемые к задачам математической физики, предложил для восстановления устойчивости сузить область решений до некоторого компакта.

Определение корректной по Тихонову задачи введено М.М.Лаврентьевым.

В развитие теории и приложений некорректных задач весомый вклад внесли ученые М.М.Лаврентьев, А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин, В.К.Иванов, В.В.Васин, В.П.Танана, В.Г.Романов, А.Г. Ягола, Ю.Е.Аниконов, С.П,Шишатский, В.А.Морозов, А.Л.Бухгейм, А.М.Денисов, Н.С.Габбасов, С.И.Кабанихин, А.С.Апарцин, М.И.Иманалиев, А. Асанов, А. Саадабаев и др.

Построена теория обобщенных решений интегральных уравнений первого рода и их аппроксимации при помощи методов теории сингулярных возмущений, разработан и применен к аппроксимации экспериментальных данных метод доказательного глобального поиска. (М.И.Иманалиев, П.С.Панков, С.Н.Алексеенко).

Вопросы регуляризации решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода в пространстве непрерывных функций изучали М.И.Иманалиев, А.С.Апарцин, А.Л.Бухгейм, А.М.Денисов, С.И.Кабанихин, А.Асанов, А.Сражидинов и др.

---

[3] Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах. Дифференциальные уравнения.-1968.- №2.-С.61.

[4]Тихонов А.Н. О методах решения некорректно поставленных задач. // В кн.: Тезисы докладов, Международный конгресс математиков.- М., 1966.

Связь темы диссертации с основными научно-исследовательскими проектами. Данная диссертационная работа выполнена в рамках проектов института теоретической и прикладной математики НАН КР: «Развитие и приложения компьютерного моделирования асимптотических методов в теории динамических систем обратных и оптимизационных экономических задач и в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетрясений», № гос.рег. 0005756, (2012-2014 гг.).

Цель и задачи исследования. Целью исследование является построение регуляризирующих уравнений для решения линейных интегральных уравнений и систем уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в различных областях, доказательство теорем единственности и получение оценки устойчивости для таких уравнений в разных семействах множеств корректностей.

Научная новизна работы и ее основные результаты заключаются в следующем: доказаны теоремы единственности решений линейных интегральных уравнений и систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в различных областях; построены регуляризирующие операторы в пространствах $L_2(G)$ и $L_{2,n}(G)$; получены оценки устойчивости в разных семействах множеств корректностей. Для получения сформулированных в работе результатов использованы методы функционального анализа и метод неотрицательных квадратичных форм.

Все основные результаты работы являются новыми. Их достоверность устанавливается доказательствами, иллюстрируются примерами.

Теоретическая значимость и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные теоретические результаты могут быть применены в различных областях науки и техники.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на международных и российских конференциях: Международная научная конференция «Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics», dedicated to Professor M. M. Lavrentiev on the occasion of his 80-th birthday

August 5-12, 2012, Novosibirsk, Russia, Третья международная конференция «Математическая физика и ее приложения»:- Самара: СамГТУ, 27 августа – 1 сентября, 2012, 6th, 7th International Conference “Inverse Problems: Modeling and Simulation”., May, 2012, 2014 Antalya, Turkey. 4th International conference “Function spaces. Differential operators. General topology. Problems of mathematical education”., March 25-29, 2013, Moscow, Russia, Международная конференция «Дифференциальные уравнения функциональные пространства теория приближений», 18-24 августа 2013, г. Новосибирск, Россия.

Результаты диссертации доложены также на семинарах: Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН «Условно-корректные задачи» под руководством член-корр. РАН В.Г. Романова, д.ф.-м.н. Д.С.Аниконова (2013), расширенного заседания кафедры Информатика и технологии обучения физико-математического факультета Кыргызско-Узбекского университета под руководством д.ф.-м.н., профессора ОшГУ А.Сопуева (2016).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в статьях [1-33], [36-43] и монографии [34], [35].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, девять глав, разбитых на параграфы, выводы и списка использованной литературы.

Работа изложена на 200 страницах машинописного текста. Перечень литературы содержит 118 наименований.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту д.ф.-м.н., профессору А. Асанову за постановку задач и внимание к работе.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, приведен обзор литературы, изложено краткое содержание диссертационной работы.

В первой главе введены основные определения и обзор основных результатов в теории некорректных задач и задачи, приводящие к ним.

В § 1.1. введены понятия корректности и некорректные задачи. Автором обобщены целый ряд научных направлений по теория некорректных задач.

В § 1.2. показаны полученные научные результаты по теорию обратных задач и некорректных задач и задачи, приводящие к некорректным задачам. Приведены примеров некорректных задач, приводящие к интегральным уравнениям первого рода, как задачи для уравнения диффузии, уравнение гиперболического типа - уравнение колебаний струны.

Во второй главе изучаются вопросы единственности решения линейного интегрального уравнения первого рода с двумя независимыми переменными.

В §2.1. рассматривается линейное интегральное уравнение вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)ds+\int_{t_0}^t\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)dyds=$$

$$= f(t,x),(t,x)\in G=\{(t,x)\in R^2 : t_0\le t\le T, a\le x\le b\}, \qquad (1)$$

где

$$K(t,x,y)=\begin{cases}A(t,x,y), & t_0\le t\le T, \quad a\le y\le x\le b,\\ B(t,x,y), & t_0\le t\le T, \quad a\le x\le y\le b,\end{cases} \qquad (2)$$

$A(t,x,y),\ B(t,x,y),\ H(t,x,s),\ C(t,x,s,y)$- известные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y): t_0\le t\le T,\ a\le y\le x\le b\},$$
$$G_2=\{(t,x,y): t_0\le t\le T,\ a\le x\le y\le b\},$$
$$G_3=\{(t,x,s): t_0\le s\le t\le T,\ a\le x\le b\},$$
$$G_4=\{(t,x,s,y): t_0\le s\le t\le T,\ a\le y\le x\le b\},$$

$f(t,x)$-известная, а $u(t,x)$- неизвестная функции, $(t,x)\in G$. Решение $u(t,x)$ ищется в $L_2(G)$, где $L_2(G)$- пространство квадратно-суммируемых функций в области G. Обозначена

$$P(s,y,z)=A(s,y,z)+B(s,z,y), \qquad (s,y,z)\in G_1.$$

Предпологается выполнения следующих условий:

1.1) $P(s,b,a)\in C[t_0,T]$, $P(s,b,a)\geq 0$ для всех $s\in[t_0,T]$,

$P'_y(s,y,a)\in C(G)$, $P'_y(s,y,a)\leq 0$ $\forall$ $(s,y)\in G$,

$P'_z(s,b,z)\in C(G)$, $P'_z(s,b,z)\geq 0$ $\forall$ $(s,z)\in G$,

$P''_{zy}(s,y,z)\in C(G_1)$, $P''_{zy}(s,y,z)\leq 0$ $\forall$ $(s,y,z)\in G_1$,

$H(T,y,t_0)\in C[a,b]$, $H(T,y,t_0)\geq 0\, \forall\, y\in[a,b]$,

$H'_s(s,y,t_0)\in C(G)$, $H'_s(s,y,t_0)\leq 0$ $\forall (s,y)\in G$,

$H'_\tau(T,y,\tau)\in C(G)$, $H'_\tau(T,y,\tau)\geq 0$ $\forall$ $(y,\tau)\in G$,

$H''_{\tau s}(s,y,\tau)\in C(G_3)$, $H''_{\tau s}(s,y,\tau)\leq 0$ $\forall$ $(s,y,\tau)\in G_3$;

и для любого

$$v(t,x)\in L_2(G), \int_a^x A(t,x,y)v(t,y)dy, \ \int_x^b B(t,x,y)v(t,y)dy, \ \int_{t_0}^t H(t,x,s)v(s,x)ds\in(G),$$

где $C[t_0,T]$, $C(G)$, $C(G_1)$ и $C(G_3)$- пространство всех непрерывных функций соответственно в области $[t_0,T]$, G, G_1 и G_3;

1.2) $C(T,b,t_0,a)\geq 0$,

$C'_s(s,b,t_0,a)\in C[t_0,T]$, $C'_s(s,b,t_0,a)\leq 0$, $\forall\, s\in[t_0,T]$,

$C'_\tau(T,b,\tau,a)\in C[t_0,T]$, $C'_\tau(T,b,\tau,a)\geq 0$, $\forall$ $\tau\in[t_0,T]$,

$C'_y(T,y,t_0,a)\in C[a,b]$, $C'_y(T,y,t_0,a)\leq 0$, $\forall$ $y\in[a,b]$,

$C'_z(T,b,t_0,z)\in C[a,b]$, $C'_z(T,b,t_0,z)\geq 0$, $\forall\, z\in[a,b]$,

$C''_{sy}(s,y,t_0,a)\in C(G)$, $C''_{sy}(s,y,t_0,a)\geq 0$, $\forall$ $(s,y)\in G$,

$C''_{\tau y}(T,y,\tau,t_0)\in C(G)$, $C''_{\tau y}(T,y,\tau,t_0)\leq 0$, $\forall$ $(y,\tau)\in G$,

$$C''_{zs}(s,b,t_0,z)\in C(G),\ C''_{zs}(s,b,t_0,z)\le 0, \forall\ (s,z)\in G,$$

$$C''_{\tau z}(T,b,\tau,z)\in C(G),\ C''_{\tau z}(T,b,\tau,z)\ge 0, \forall\ (\tau,z)\in G,$$

$$C'''_{\tau sy}(s,y,\tau,a)\in C(G_3),\ C'''_{\tau sy}(s,y,\tau,a)\ge 0, \forall\ (s,y,\tau)\in G_3,$$

$$C'''_{\tau zs}(s,b,\tau,z)\in C(G_3),\ C'''_{\tau zs}(s,b,\tau,z)\le 0, \forall\ (s,z,\tau)\in G_3,$$

$$C'''_{zsy}(s,y,t_0,z)\in C(G_1),\ C'''_{zsy}(s,y,t_0,z)\ge 0, \forall\ (s,y,z)\in G_1,$$

$$C'''_{\tau zy}(T,y,\tau,z)\in C(G_1),\ C'''_{\tau zy}(T,y,\tau,z)\le 0, \forall\ (\tau,y,z)\in G_1,$$

$$C^{(IV)}_{\tau zsy}(s,y,\tau,z)\in C(G_4),\ C^{(IV)}_{\tau zsy}(s,y,\tau,z)\ge 0, \forall\ (s,y,\tau,z)\in G_4,$$

$$C''_{\tau s}(s,b,\tau,a)\in C(G_5),\ C''_{\tau s}(s,b,\tau,a)\le 0\ \forall\ (s,\tau)\in G_5=\{(s,\tau): t_0\le\tau\le s\le T\},$$
$$C''_{zy}(T,y,t_0,z)\in C(G_6),\ C''_{zy}(T,y,t_0,z)\le 0\ \forall\ (y,z)\in G_6=\{(y,z): a\le z\le y\le b\};$$

1.3) При почти всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ и для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R$:

$$L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left(-P'_y(s,y,a)\right)\alpha_1^2+$$

$$+\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left(-H'_y(s,y,t_0)\right)\alpha_2^2+\frac{2}{(s-t_0)(y-a)}\left(-C(s,y,t_0,a)\right)\alpha_1\alpha_2+$$

$$+\frac{1}{y-a}\left(-H''_{\tau s}(s,y,\tau)\right)\alpha_3^2+\frac{2}{y-a}\left(-C'_\tau(s,y,\tau,a)\right)\alpha_3\alpha_1+$$

$$+\frac{2}{s-t_0}\left(-C'_z(s,y,t_0,z)\right)\alpha_2\alpha_4+\frac{1}{s-t_0}\left(-P''_{zy}(s,y,z)\right)\alpha_4^2+$$

$$+\left(-2C''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\right)\alpha_3\alpha_4\ge 0;$$

1.4) Если при всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ $L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=0$, то выполняется, хотя бы, один из следующих условий:

1) $\alpha_1=0$; 2) $\alpha_2=0$; 3) $\alpha_3=0$; 4) $\alpha_4=0$.

С помощью метода, неотрицательных квадратичных форм, доказывается следующая теорема единственности решения уравнения (1) в классе $L_2(G)$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1.1), 1.2), 1.3) и 1.4). Тогда решение $u(t,x)$ уравнения (1) единственно в пространстве $L_2(G)$.

В § 2.2. рассматривается уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^T H(t,x,s)u(s,x)ds+\int_{t_0}^t\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)dyds=$$

$$=f(t,x),(t,x)\in G,\qquad G=\{(t,x)\in R^2: t_0\le t\le T,\ a\le x\le b\},\tag{3}$$

где

$$K(t,x,y)=\begin{cases}A(t,x,y), & t_0\le t\le T,\quad a\le y\le x\le b;\\ B(t,x,y), & t_0\le t\le T,\quad a\le x\le y\le b,\end{cases}\tag{4}$$

$$H(t,x,s)=\begin{cases}M(t,x,s), & t_0\le s\le t\le T,\quad a\le x\le b;\\ N(t,x,s), & t_0\le t\le s\le T,\quad a\le x\le b.\end{cases}\tag{5}$$

$A(t,x,y), B(t,x,y), M(t,x,s), N(t,x,s),\ C(t,x,s,y)$- известные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y):\quad t_0\le t\le T,\quad a\le y\le x\le b\};$$
$$G_2=\{(t,x,y):\quad t_0\le t\le T,\quad a\le x\le y\le b\};$$
$$G_3=\{(t,x,s):\quad t_0\le s\le t\le T,\quad a\le x\le b\};$$
$$G_4=\{(t,x,s):\quad t_0\le t\le s\le T,\quad a\le x\le b\};$$
$$G_5=\{(t,x,s,y):\quad t_0\le s\le t\le T,\quad a\le y\le x\le b\}.$$

$f(t,x)$-известная, а $u(t,x)$- неизвестная функция, $(t,x)\in G$.

Обозначена

$$\begin{cases}P(s,y,z)=A(s,y,z)+B(s,z,y),\ (s,y,z)\in G_1,\\ Q(s,y,\tau)=M(s,y,\tau)+N(\tau,y,s).\ (s,y,\tau)\in G_3.\end{cases}$$

Предпологается выполнение следующих условий:

2.1.) $$\begin{array}{l}P(s,b,a)\in C[t_0,T],\ P(s,b,a)\ge 0,\ \forall\ s\in[t_0,T],\\ P'_y(s,y,a)\in C(G),\ P'_y(s,y,a)\le 0,\ \forall\ (s,y)\in G,\end{array}$$

$$\begin{array}{l}P'_z(s,b,z)\in C(G),\ P'_z(s,b,z)\ge 0,\ \forall\ (s,z)\in G,\\ P''_{zy}(s,y,z)\in C(G_1),\ P''_{zy}(s,y,z)\le 0,\ \forall\ (s,y,z)\in G_1,\end{array}$$

$$\begin{array}{l}Q(T,y,t_0)\in C[a,b],\ Q(T,y,t_0)\ge 0,\ \forall\ y\in[a,b],\\ Q'_s(s,y,t_0)\in C(G),\ Q'_s(s,y,t_0)\le 0,\ \forall\ (s,y)\in G,\end{array}$$

$$Q'_\tau(T,y,\tau)\in C(G),\ Q'_\tau(T,y,\tau)\geq 0,\ \forall\ (y,\tau)\in G,$$

$$Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\in C(G_3),\ Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\leq 0,\ \forall\ (s,y,\tau)\in G_3.$$

и для любого

$v(t,x)\in L_2(G)$,

$$\int_a^x A(t,x,y)v(t,y)dy,\ \int_x^b B(t,x,y)v(t,y)dy,\ \int_{t_0}^t M(t,x,s)v(s,x)ds,\ \int_t^T N(t,x,s)v(s,x)ds\in L_2(G).$$

2.2) $C(T,b,t_0,a)\geq 0$,

$$C'_s(s,b,t_0,a)\in C[t_0,T],\ C'_s(s,b,t_0,a)\leq 0,\forall\, s\in[t_0,T],$$

$$C'_\tau(T,b,\tau,a)\in C[t_0,T],\ C'_\tau(T,b,\tau,a)\geq 0,\ \forall\ \tau\in[t_0,T],$$

$$C'_y(T,y,t_0,a)\in C[a,b],\ C'_y(T,y,t_0,a)\leq 0,\ \forall\ y\in[a,b],$$

$$C'_z(T,b,t_0,z)\in C[a,b],\ C'_z(T,b,t_0,z)\geq 0,\ \forall\ z\in[a,b],$$

$$C''_{sy}(s,y,t_0,a)\in C(G),\ C''_{sy}(s,y,t_0,a)\geq 0,\forall\ (s,y)\in G,$$

$$C''_{\tau y}(T,y,\tau,t_0)\in C(G),\ C''_{\tau y}(T,y,\tau,t_0)\leq 0,\ \forall\ (y,\tau)\in G,$$

$$C''_{zs}(s,b,t_0,z)\in C(G),\ C''_{zs}(s,b,t_0,z)\leq 0,\ \forall\ (s,z)\in G,$$

$$C''_{\tau z}(T,b,\tau,z)\in C(G),\ C''_{\tau z}(T,b,\tau,z)\geq 0,\ \forall\ (\tau,z)\in G,$$

$$C'''_{\tau sy}(s,y,\tau,a)\in C(G_3),\ C'''_{\tau sy}(s,y,\tau,a)\geq 0,\ \forall\ (s,y,\tau)\in G_3,$$

$$C'''_{\tau zs}(s,b,\tau,z)\in C(G_3),\ C'''_{\tau zs}(s,b,\tau,z)\leq 0,\ \forall\ (s,z,\tau)\in G_3,$$

$$C'''_{zsy}(s,y,t_0,z)\in C(G_1),\ C'''_{zsy}(s,y,t_0,z)\geq 0,\ \forall\ (s,y,z)\in G_1,$$

$$C'''_{\tau zy}(T,y,\tau,z)\in C(G_1),\ C'''_{\tau zy}(T,y,\tau,z)\leq 0,\ \forall\ (\tau,y,z)\in G_1,$$

$$C^{(IV)}_{\tau zsy}(s,y,\tau,z)\in C(G_4),\ C^{(IV)}_{\tau zsy}(s,y,\tau,z)\geq 0,\ \forall\ (s,y,\tau,z)\in G_4,$$

$$C''_{\tau s}(s,b,\tau,a)\in C(G_5),\ C''_{\tau s}(s,b,\tau,a)\leq 0,\forall\ (s,\tau)\in G_5=\{(s,\tau): t_0\leq\tau\leq s\leq T\},$$

$$C''_{zy}(T,y,t_0,z)\in C(G_6),\ C''_{zy}(T,y,t_0,z)\leq 0,\ \forall\ (y,z)\in G_6=\{(y,z): a\leq z\leq y\leq b\}.$$

2.3) При почти всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ и для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R$:

$$L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left(-P'_y(s,y,a)\right)\alpha_1^2+$$

$$+\frac{1}{(s-t_0)(y-a)}\left(-Q'_y(s,y,t_0)\right)\alpha_2^2+\frac{2}{(s-t_0)(y-a)}\left(-C(s,y,t_0,a)\right)\alpha_1\alpha_2+$$

$$+\frac{1}{y-a}\left(-Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\right)\alpha_3^2+\frac{2}{y-a}\left(-C'_\tau(s,y,\tau,a)\right)\alpha_3\alpha_1+$$

$$+\frac{2}{s-t_0}\left(-C'_z(s,y,t_0,z)\right)\alpha_2\alpha_4+\frac{1}{s-t_0}\left(-P''_{zy}(s,y,z)\right)\alpha_4^2+$$

$$+\left(-2C''_{\tau z}(s,y,\tau,z)\right)\alpha_3\alpha_4\geq 0;$$

2.4) Если при почти всех $(s,y,\tau,z)\in G_4$ $L(s,y,\tau,z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=0$, то выполняется, хотя бы, один из следующих условий:

1) $\alpha_1=0$; 2) $\alpha_2=0$; 3) $\alpha_3=0$; 4) $\alpha_4=0$.

<u>Теорема 2.</u> Пусть выполняются условия 2.1), 2.2), 2.3) и 2.4). Тогда решение $u(t,x)$ уравнения (3) единственно в классе $L_2(G)$.

В §2.3. рассматривается следующее уравнение

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)ds+\int_{t_0}^T\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dy=$$

$$=f(t,x),(t,x)\in G,\quad G=\{(t,x)\in R^2,\quad t_0\leq t\leq T,\ a\leq x\leq b\},\tag{6}$$

где

$$K(t,x,y)=\begin{cases}A(t,x,y), & t_0\leq t\leq T;\quad a\leq y\leq x\leq b;\\ B(t,x,y), & t_0\leq t\leq T;\quad a\leq x\leq y\leq b,\end{cases}\tag{7}$$

$A(t,x,y)$, $B(t,x,y)$, $H(t,x,s)$, $C(t,x,s,y)$- известные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y):\ t_0\leq t\leq T,\ a\leq y\leq x\leq b\};$$
$$G_2=\{(t,x,y):\ t_0\leq t\leq T,\ a\leq x\leq y\leq b\};$$
$$G_3=\{(t,x,s):\ t_0\leq s\leq t\leq T,\ a\leq x\leq b\},\quad G^2=G\times G.$$

$f(t,x)$-известная, а $u(t,x)$- неизвестная функция, $(t,x)\in G$.

Предполагается, что ядро $C(t,x,s,y)$- интегрируемо с квадратом в области G^2 т.е. $C(t,x,s,y)\in L_2(G^2)$ и разлагается в ряд

$$C(t,x,s,y)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(t,x)\varphi_i(s,y),\ m\le\infty,\ 0\le\lambda_i,\ i=1,2,...,m \tag{8}$$

где $\lambda_1,\lambda_2,...$ - собственные значения ядра $C(t,x,s,y)$, расположенные в порядке убывания их модулей $|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge...$ и $\varphi_1(t,x),\ \varphi_2(t,x),...$ соответствующие ортонормированные собственные функции.

Обозначена

$$P(s,y,z)=A(s,y,z)+B(s,z,y),\ (s,y,z)\in G_1.$$

Пусть выполняются следующие условия:

3.1) $P(s,b,a)\in C[t_0,T], P(s,b,a)\ge 0\ \forall s\in[t_0,T],$

$P'_y(s,y,a)\in C(G),\ P'_y(s,y,a)\le 0\ \forall(s,y)\in G,$

$P'_z(s,b,z)\in C(G),\ P'_z(s,b,z)\ge 0\ \ \forall(s,z)\in G,$

$P''_{zy}(s,y,z)\in C(G_1),\ P''_{zy}(s,y,z)\le 0,\ \ (s,y,z)\in G_1;$

3.2) $H(T,y,t_0)\in C[a,b],\ H(T,y,t_0)\ge 0\ \forall y\in[a,b],$

$H'_s(s,y,t_0)\in C(G),\ H'_s(s,y,t_0)\le 0\ \forall(s,y)\in G,$

$H'_\tau(T,y,\tau)\in C(G),\ H'_\tau(T,y,\tau)\ge 0\ \forall(y,\tau)\in G,$

$H''_{\tau s}(s,y,\tau)\in C(G_3),\ H''_{\tau s}(s,y,\tau)\le 0,\ \ (s,y,\tau)\in G_3$ и для любого

$$v(t,x)\in L_2(G),\ \int_a^x A(t,x,y)v(t,y)dy,\ \int_x^b B(t,x,y)v(t,y)dy,\ \int_{t_0}^t H(t,x,s)v(s,x)ds\in L_2(G);$$

3.3) Выполняются хотя бы один из следующих четырех условий

а) при почти всех $(s,y)\in G\quad P'_y(s,y,a)<0;$

б) при почти всех $(s,z)\in G\quad P'_z(s,b,z)>0;$

в) при почти всех $(s,y)\in G\quad H'_s(s,y,t_0)<0;$

г) при почти всех $(\tau,y)\in G\quad H'_\tau(T,y,\tau)>0;$

3.4) Ядро $C(t,x,s,y)$- представимо в виде (8) и в разложении (8) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ неотрицательны.

3.5) Ядро $C(t,x,s,y)$- представимо в виде (8) и в разложении (8) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ положительны.

Доказывается следующие теоремы единственности решения уравнения (6) в классе $L_2(G)$.

<u>Теорема 3.</u> Пусть выполняются 3.1), 3.2), 3.3) и 3.4). Тогда решение уравнения (6) единственно в пространстве $L_2(G)$.

<u>Теорема 4.</u> Пусть выполняются условия 3.1), 3.2) и 3.5). Тогда решение уравнения (6) единственно в пространстве $L_2(G)$.

В § 2.4. рассматриваются интегральные уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^T H(t,x,s)u(s,x)ds+\int_{t_0}^T\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds=$$

$$=f(t,x),(t,x)\in G=\{(t,x)\in R^2: t_0\le t\le T,\ a\le x\le b\}, \tag{9}$$

где

$$K(t,x,y)=\begin{cases}A(t,x,y), & t_0\le t\le T,\ a\le y\le x\le b;\\ B(t,x,y), & t_0\le t\le T,\ a\le x\le y\le b,\end{cases} \tag{10}$$

$$H(t,x,s)=\begin{cases}M(t,x,s), & t_0\le s\le t\le T,\quad a\le x\le b;\\ N(t,x,s), & t_0\le t\le s\le T,\quad a\le x\le b,\end{cases} \tag{11}$$

$A(t,x,y),\ B(t,x,y),\ M(t,x,s),\ N(t,x,s),\ C(t,x,s,y)$- известные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y),\quad t_0\le t\le T,\quad a\le y\le x\le b\},$$
$$G_2=\{(t,x,y),\quad t_0\le t\le T,\quad a\le x\le y\le b\},$$
$$G_3=\{(t,x,s),\quad t_0\le s\le t\le T,\quad a\le x\le b\},$$
$$G_4=\{(t,x,s),\quad t_0\le t\le s\le T,\quad a\le x\le b\},\ G^2=G\times G,$$

$f(t,x)$-известная, а $u(t,x)$- неизвестная функция, $(t,x)\in G$.

В данном случае также предполагается, что ядро $C(t,x,s,y)$- интегрируемо с квадратом в области G^2 т.е. $C(t,x,s,y)\in L_2(G^2)$ и разлагается в ряд виде (8).

Обозначены

$$\begin{cases} P(s,y,z)=A(s,y,z)+B(s,z,y), \ (s,y,z)\in G_1, \\ Q(s,y,\tau)=M(s,y,\tau)+N(\tau,y,s). \ (s,y,\tau)\in G_3. \end{cases}$$

Потребуем выполнения следующих условий:

4.1) $P(s,b,a)\geq 0 \ \ \forall s\in[t_0,T], \ P(s,b,a)\in C[t_0,T],$

$P'_y(s,y,a)\leq 0 \ \ \forall (s,y)\in G, \ P'_y(s,y,a)\in C(G),$

$P'_z(s,b,z)\geq 0 \ \forall (s,z)\in G, \ P'_z(s,b,z)\in C(G),$

$P''_{zy}(s,y,z)\leq 0, \quad (s,y,z)\in G_1, \ P''_{zy}(s,y,z)\in C(G_1);$

4.2) $Q(T,y,t_0)\geq 0 \ \forall y\in[a,b], \ Q(T,y,t_0)\in C[a,b],$

$Q'_s(s,y,t_0)\leq 0 \ \forall (s,y)\in G, \ Q'_s(s,y,t_0)\in C(G),$

$Q'_\tau(T,y,\tau)\geq 0 \ \forall (y,\tau)\in G, \ Q'_\tau(T,y,\tau)\in C(G),$

$Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\leq 0 \ \forall (s,y,\tau)\in G_3, \ Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\in C(G_3)$

и для любого

$v(t,x)\in L_2(G),$

$$\int_a^x A(t,x,y)v(t,y)dy, \ \int_x^b B(t,x,y)v(t,y)dy, \ \int_{t_0}^t M(t,x,s)v(s,x)ds, \int_t^T N(t,x,s)v(s,x)ds\in L_2(G);$$

4.3) Выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:

а) при почти всех $(s,y)\in G \quad P'_y(s,y,a)<0;$

б) при почти всех $(s,z)\in G \quad P'_z(s,b,z)>0;$

в) при почти всех $(s,y)\in G \quad Q'_s(s,y,t_0)<0;$

г) при почти всех $(\tau,y)\in G \quad Q'_\tau(T,y,\tau)>0.$

4.4) Ядро $C(t,x,s,y)$- представимо в виде (8) и в разложении (8) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ неотрицательны.

4.5) Ядро $C(t,x,s,y)$- представимо в виде (8) и в разложении (8) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ положительны.

Доказаны следующие теоремы единственности решений уравнения (9).

<u>Теорема 5.</u> Пусть выполняются условия 4.1), 4.2), 4.3) и 4.4). Тогда решение $u(t,x)$ уравнения (9) единственно в пространстве $L_2(G)$.

<u>Теорема 6</u>. Пусть выполняются условия 4.1), 4.2) и 4.5). Тогда решение $u(t,x)$ уравнение (9) единственно в пространстве $L_2(G)$.

В третьей главе обобщается единственности решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными соответствующей во второй главе.

В четвертой главе получены оценки устойчивости и регуляризация линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными.

В § 4.1. изучается регуляризация линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными вида (9).

Семейство множеств корректности M_α, зависящее от параметра α, выделены следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{ u(t,x) \in L_2(G) : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-\alpha} \left| u^{(\nu)} \right|^2 \le c \right\},$$

где $c > 0, \quad 0 < \alpha < \infty,$

$$u^{(\nu)} = \int_{t_0}^{T} \int_{a}^{b} u(t,x)\ \varphi_\nu(t,x) dx dt,\ \nu = 1,2,\ldots,\infty. \tag{12}$$

При выполнении условий 4.1), 4.2) и 4.5) получены оценки устойчивости

$$\|u(t,x)\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \| f(t,x) \|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \infty, \tag{13}$$

где $u(t,x) \in M_\alpha$, $f(t,x) \in K(M_\alpha)$.

А также показаны, что решение уравнения

$$\varepsilon \vartheta(t,x,\varepsilon)+\int_a^b K(t,x,y)\vartheta(t,y,\varepsilon)dy+\int_{t_0}^T H(t,x,s)\vartheta(s,x,\varepsilon)ds+$$

$$+\int_{t_0}^T\int_a^b C(t,x,s,y)\vartheta(s,y,\varepsilon)dyds=f(t,x),(t,x)\in G, \tag{14}$$

где $\varepsilon>0$ - малый параметр, будет регуляризирующим для уравнения (9) на множестве M_α.

При выполнении условий 4.1), 4.2) и 4.5)

$$\|\vartheta(t,x,\varepsilon)-u(t,x)\|_{L_2}\le c^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda_1^{\frac{\alpha(1+2\alpha)}{4(1+\alpha)}}\cdot\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}},\quad 0<\alpha<\infty. \tag{15}$$

В § 4.2. соответственно в (9) получены оценка устойчивости линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными вида (6).

В пятой главе обобщены полученные оценки устойчивости и регуляризация для систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными соответствующих в четвертой главе.

В шестой главе рассматривается единственность решений линейное интегральное уравнение первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях.

В § 6.1. рассматривается уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^\infty H(t,x,s)u(s,x)ds+\int_{t_0}^t\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)dyds=$$

$$=f(t,x),(t,x)\in G,\qquad G=\{(t,x)\in R^2: t_0\le t<\infty,\ a\le x\le b\}, \tag{16}$$

где

$$K(t,x,y)=\begin{cases}A(t,x,y), & t_0\le t<\infty,\ a\le y\le x\le b;\\ B(t,x,y), & t_0\le t<\infty,\ a\le x\le y\le b,\end{cases} \tag{17}$$

$$H(t,x,s)=\begin{cases}M(t,x,s), & t_0\le s\le t<\infty,\quad a\le x\le b;\\ N(t,x,s), & t_0\le t\le s<\infty,\quad a\le x\le b.\end{cases} \tag{18}$$

$A(t,x,y),\ B(t,x,y),\ M(t,x,s),\ N(t,x,s),\ C(t,x,s,y)$- известные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y):\quad t_0\le t<\infty,\quad a\le y\le x\le b\};$$
$$G_2=\{(t,x,y):\quad t_0\le t<\infty,\quad a\le x\le y\le b\};$$
$$G_3=\{(t,x,s):\quad t_0\le s\le t<\infty,\quad a\le x\le b\};$$
$$G_4=\{(t,x,s):\quad t_0\le t\le s<\infty,\quad a\le x\le b\};$$
$$G_5=\{(t,x,s,y):\quad t_0\le s\le t<\infty,\quad a\le y\le x\le b\}.$$

$f(t,x)$-известная, а $u(t,x)$- неизвестная функция, $(t,x)\in G$.

Доказана теорема единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях.

В § 6.2. рассматривается один класс линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)dx+\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dy=$$
$$=f(t,x),(t,x)\in G,\quad G=\{(t,x)\in R^2,\quad t_0\le t<\infty,\ a\le x\le b\},\tag{19}$$

где

$$K(t,x,y)=\begin{cases}A(t,x,y), & t_0\le t<\infty,\quad a\le y\le x\le b;\\ B(t,x,y), & t_0\le t<\infty,\quad a\le x\le y\le b,\end{cases}\tag{20}$$

$A(t,x,y),\ B(t,x,y),\ H(t,x,s),\ C(t,x,s,y)$- известные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y):t_0\le t<\infty,\ a\le y\le x\le b\};$$
$$G_2=\{(t,x,y):t_0\le t<\infty,\ a\le x\le y\le b\};$$
$$G_3=\{(t,x,s):t_0\le s\le t<\infty,\ a\le x\le b\},\quad G^2=G\times G.$$

$f(t,x)$-известная, а $u(t,x)$- неизвестная функция, $(t,x)\in G$.

Предполагается, что ядро $C(t,x,s,y)$- интегрируемо с квадратом в области G^2 т.е. $C(t,x,s,y)\in L_2(G^2)$ и разлагается в ряд

$$C(t,x,s,y)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(t,x)\varphi_i(s,y),\ \ m\le\infty,\ \ 0\le\lambda_i,\ \ i=1,2,...,m \tag{21}$$

где $\lambda_1,\lambda_2,...$ - собственные значения ядра $C(t,x,s,y)$, расположенные в порядке убывания их модулей $|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge...$ и $\varphi_1(t,x),\ \varphi_2(t,x),...$ соответствующие ортонормированные собственные функции. Доказана теорема единственности уравнения (19) в неограниченных областях..

В § 6.3 рассматривается уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^{\infty}H(t,x,s)u(s,x)ds+\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds=$$

$$=f(t,x),(t,x)\in G=\{(t,x)\in R^2:t_0\le t<\infty,a\le x\le b\}, \tag{22}$$

где

$$K(t,x,y)=\begin{cases}A(t,x,y),\ t_0\le t<\infty,\ a\le y\le x\le b;\\ B(t,x,y),\ t_0\le t<\infty,\ a\le x\le y\le b,\end{cases} \tag{23}$$

$$H(t,x,s)=\begin{cases}M(t,x,s),\ t_0\le s\le t<\infty,\quad a\le x\le b;\\ N(t,x,s),\ t_0\le t\le s<\infty,\quad a\le x\le b,\end{cases} \tag{24}$$

$A(t,x,y),\ B(t,x,y),\ M(t,x,s),\ N(t,x,s),\ C(t,x,s,y)$- известные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\{(t,x,y),\quad t_0\le t<\infty,\quad a\le y\le x\le b\},$$
$$G_2=\{(t,x,y),\quad t_0\le t<\infty,\quad a\le x\le y\le b\},$$
$$G_3=\{(t,x,s),\quad t_0\le s\le t<\infty,\quad a\le x\le b\},$$
$$G_4=\{(t,x,s),\quad t_0\le t\le s<\infty,\quad a\le x\le b\},\ G^2=G\times G,$$

$f(t,x)$-известная, а $u(t,x)$- неизвестная функция, $(t,x)\in G$.

Предполагается, что ядро $C(t,x,s,y)$ - интегрируемо с квадратом в области, G^2 т.е. $C(t,x,s,y)\in L_2(G^2)$ и разлагается в ряд в виде (21).

Доказывается теорема единственности решения линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными (22) в неограниченных областях.

Седьмая глава посвящена изучением системы линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях соответствующие в шестой главе.

В восьмой главе получены оценки устойчивости и регуляризация линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях.

В § 8.1. рассматривается регуляризация решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях в виде (22).

Семейство множеств корректности M_α, зависящее от параметра α, выделены следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{ u(t,x) \in L_2(G) : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-\alpha} \left| u^{(\nu)} \right|^2 \le c \right\}, \tag{25}$$

где $c > 0, \quad 0 < \alpha < \infty,$

$$u^{(\nu)} = \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b u(t,x)\ \varphi_\nu(t,x)\,dx\,dt,\ \nu = 1,2,\dots,\infty.$$

Ясно, что если $u(t,x) \in M_\alpha$, то $\|u(t,x)\|^2 \le c\lambda_1^2$.

Получены следующие оценки

$$\|u(t,x)\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \|f(t,x)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \infty, \tag{26}$$

где $u(t,x) \in M_\alpha,\ f(t,x) \in K(M_\alpha)$.

А также показаны, что решение уравнения

$$\varepsilon\vartheta(t,x,\varepsilon) + \int_a^b K(t,x,y)u(s,y)\vartheta(t,y,\varepsilon)dy + \int_{t_0}^{\infty} H(t,x,s)\vartheta(s,x,\varepsilon)ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)\vartheta(s,y,\varepsilon)dyds = f(t,x), (t,x) \in G, \tag{27}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, будет регуляризирующим для уравнения (22) на множестве M_α. И получены следующая оценка

$$\left\|\vartheta(t,x,\varepsilon) - u(t,x)\right\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_1^{\frac{\alpha(1+2\alpha)}{4(1+\alpha)}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{28}$$

В § 8.2. получены оценки устойчивости линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях в (19).

Девятой главе получены оценки устойчивости и регуляризация систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях соответственно в восьмой главе.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе изложены вопросов теории обратных задач. Теории некорректных задач занимают заметное место в теории обратных задач. Для изложения с достаточной полнотой всех полученных результатов в одном классе некорректных задач, т.е. в классе интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными проведены исследование регуляризация и единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в различных областях. Используя, методами функционального анализа и метод неотрицательных квадратичных форм доказаны теоремы единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными и систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в различных областях.

Отметим, полученные существенные результаты исследований линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в ограниченных и неограниченных областях, открыла возможность получить оценки устойчивости и построить регуляризирующие операторы в разных множеств корректностей. Таким образом, задача определения приближенного решения по приближенным данным сводится к нахождению регуляризующего оператора и параметра регуляризации.

Некорректные задачи, примеры были нами приведены, задачи для уравнения диффузии, гиперболические (волновое) уравнения, сводятся к интегральным уравнениям первого рода, свойства решений которых существенно отличаются как от свойств решений интегральных уравнений второго рода.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору Асанову А. за постановки задач и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Каденова, З.А.** Регуляризация и единственность решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода[Текст]/ А.Асанов, З.А. Каденова // Труды международной конференции «Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics», dedicated to Professor M. M. Lavrentiev on the occasion of his 75-th birthday. August 20-25, 2007. Novosibirsk, Russia. Электронный сборник.
2. **Каденова, З. А.** Об единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст]/ А.Асанов, З.А. Каденова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2010,- Вып.43- С. 46-53.
3. **Каденова, З. А.** Регуляризация и устойчивость линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными[Текст]/ З.А. Каденова// Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2010,- Вып.42.- С.200-205.
4. **Каденова, З. А.** Об одном классе линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными[Текст]/ З.А. Каденова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2010,- Вып.43- С. 53-68.
5. **Каденова, З. А.** Регуляризация и единственность решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст]/ З.А. Каденова // Наука и новые технологии, № 10, Бишкек, 2010. С.3-8.
6. **Каденова, З. А.** Единственность и устойчивость решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст]/ З.А. Каденова // Наука и новые технологии, № 10, Бишкек, 2010. С. 17-21.
7. **Каденова, З. А.** О единственности решений интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными[Текст]/ З.А. Каденова

// Вестник Кыргызского Национального университета имени Жусупа Баласагына. -Бишкек, 2011,-Специальный выпуск.- С. 267-270.

8. **Каденова,З.А.** Единственность решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст]/ З.А. Каденова // Наука и новые технологии, № 10, Бишкек, 2011. С. 3-8.
9. **Каденова,З. А.** О единственности решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях[Текст]/ З.А. Каденова // Наука и новые технологии, № 10, Бишкек, 2011. С.9-16.
10. **Каденова,З.А.** Единственность и устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст]/ А.Асанов, З.А. Каденова// Труды межд. конф.«Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics», dedicated to Professor M. M. Lavrentiev on the occasion of his 80-th birthday August 5-12, 2012, Novosibirsk, Russia.
11. **Каденова,З.А.** Регуляризация и устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными[Текст]/ А.Асанов, З.А. Каденова // Труды межд. конф. «Функциональный анализ и его приложения», посвященную 70-летию со дня рождения д.ф.-м.н., академика Национальной Академии наук РК М. Отелбаева, 2- 5 октября 2012 г., г. Астана, Казакстан.
12. **Каденова, З. А.** Один класс линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст]/ З.А. Каденова// Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2012- Вып.44.- С.73-79.
13. **Каденова,З.А.** О единственности решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях[Текст]/ З.А. Каденова //

Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2012,- Вып.45.- С.64-75.

14. **Каденова, З. А.** О решениях систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст]/ З.А. Каденова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2012,- Вып.45.- С.76-84.
15. **Каденова, З. А.** Один класс линейных интегральных уравнений первого рода с двумя неизвестными переменными[Текст]/ З.А. Каденова // Третья международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: Материалы конф.- Самара: СамГТУ, 27 августа – 1 сентября, 2012., С. 153-154.
16. **Каденова, З. А.** О решениях систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст]/ З.А. Каденова // Известия ВУЗов, №7, Бишкек, 2012, С. 9-12.
17. **Каденова, З. А.** Регуляризация линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях[Текст]/ З.А. Каденова // Известия ВУЗов, №7, Бишкек, 2012, С.5-7.
18. **Каденова, З. А.** Оценка устойчивости линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях[Текст]/ З.А. Каденова // Наука и новые технологии, № 9, Бишкек, 2012. С.3-5.
19. **Каденова, З.А.** Регуляризация систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях[Текст]/ З.А. Каденова // Наука и новые технологии, № 9, Бишкек, 2012. С.41-46.
20. **Каденова, З. А.** О решениях линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст]/ З.А. Каденова // Вестник Кыргызско-Российского

Славянского университета имени Б. Ельцина. - Бишкек, 2013,- Выпуск 13. №1- С. 71-74.

21. **Каденова, З. А.** Об одном классе систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными[Текст]/ З.А. Каденова // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета имени Б. Ельцина. - Бишкек, 2013,- Выпуск 13.№5- С. 164-170.
22. **Каденова, З. А.** Один класс систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст]/ З.А. Каденова // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета имени Б. Ельцина. - Бишкек, 2013,- Выпуск 13. №7- С. 10-14.
23. **Каденова, З.А.** Оценка устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст]/ З.А. Каденова // Наука и новые технологии, № 4, Бишкек, 2013. С.3-8.
24. **Каденова, З. А.** Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст]/ З.А. Каденова // Известия ВУЗов, №4, Бишкек, 2013, С.46-50.
25. **Каденова, З.А.** Один класс линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст]/ З.А. Каденова // Тезисы и тексты докладов международный конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математические моделирование новые задачи и методы» Проблемы математического и естественнонаучного образования; 15-18 декабря 2014г. - Москва: РУДН, С.123-129.
26. **Каденова З.А.**// Один класс линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст]/ М.И. Иманалиев, А.Асанов, З.А. Каденова // ДАН КР 2014. Т.454. №5, с. 518-522.

27. **Каденова З. А.** Единственность и устойчивость решений для некоторых интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст]/ А.Асанов, З.А. Каденова // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования : сборник статей международной конференции. / под ред. А. И. Кириллова, С. А. Розановой. – Москва: РУДН, 2015, стр. 124-128.
28. **Каденова, З.А.** Устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными[Текст]/ З.А. Каденова // Тезисы докладов Международного научного семинара по обратным и некорректно поставленным задачам. – Москва, РУДН: 19–21 ноября 2015 г. С. 85-90.
29. **Каденова, З.А.** Единственности и оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст]/ З.А. Каденова //Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета имени Б. Ельцина. -Бишкек, 2016. Том 16.№1- С.10-14.
30. **Каденова, З.А.** Один класс систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст]/ З.А. Каденова //Международный научный журнал «Символ науки».-Уфа, 2016 №5-С.21-25.
31. **Каденова, З.А.** Единственности и оценки устойчивости решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст]/ З.А. Каденова // Международный научный журнал «Символ науки».- Уфа, 2016 №5-С.15-20.
32. **Каденова, З.А.** Регуляризация систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях [Текст]/ З.А. Каденова // Сборник тезисов

восьмой международной молодежной научной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук. Новосибирск. 01–07 сентября 2016 г., С.65-66.

33. **Каденова, З.А.** Устойчивость решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст]/ З.А. Каденова // Международный научный журнал «Символ науки».- Уфа, 2016 №10-С.15-20.
34. **Каденова, З. А.** Линейные интегральные уравнение первого рода. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений первого рода [Текст]/ А.Асанов, З.А. Каденова.- Германия: «Немецкое издательство LAP LAMBERT Academic Publishing», 2012.- 156 стр.
35. **Каденова, З.А.** Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными [Текст]/ З.А. Каденова.- Бишкек: Илим, 2013. - 194 стр.
36. **Kadenova, Z. A.** Uniqueness and stability of solutions of linear integral equations of the first kind [Text]/ A.Asanov , Z. A. Kadenova //The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society, July 1-3, 2011, Baku, Azerbaijan.
37. **Kadenova, Z. A.** Uniqueness and stability of solutions of linear integral equations of the first kind with two variables [Text]/ A.Asanov, Z. A. Kadenova // 6th International Conference “Inverse Problems: Modeling and Simulation”., May 21- 26, 2012, Antalya, Turkey.
38. **Kadenova, Z. A.** Uniqueness of solutions of the system linear integral equations of the first kind with two variables [Text]/ A.Asanov, Z. A. Kadenova // 4th International conference “Function spaces. Differential operators. General topology. Problems of mathematical education”., March 25 -29, 2013, Moscow, Russia.

39. **Kadenova, Z. A.** Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables[Text]/ A.Asanov, M. Haluk Chelik, Z. A. Kadenova // International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914.HIKARI Ltd.
40. **Kadenova, Z. A.** Uniqueness and Stability of Solutions for Certain Linear Equations of the First Kind with Two Variables [Text]/ A.Asanov, Z. A. Kadenova // Bulletin of Peoples Friendship of Russia. Moscow, Russia-2013, №3- C. 30-36.
41. **Kadenova, Z. A.** Uniqueness and Solutions for Class of Linear Equations of the First Kind with Two Variables [Text]/ Z. A. Kadenova // Bulletin of Peoples Friendship of Russia. Moscow, Russia -2013, №3- C. 21-30.
42. **Kadenova, Z.A.** A Class of Linier Intergral Eguations of the First Kind with Two Independent Variables [Text]/ M.I. Imanaliev, A.Asanov, Z. A. Kadenova. ISSN 1064-5624, Doklady Mathematics, 2014, Vol.89, № 1, pp.98-102.
43. **Kadenova, Z.A.** Uniqueness of solutions for one class of linear equations of the first kind with two variables [Text]/ Z. A. Kadenova // 7th International Conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation", May 26- 31, 2014, Turkey.

РЕЗЮМЕ

Каденова Зууракан Ажимаматовна

“Көз карандысыз эки өзгөрүлмөлүү биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелердин чечиминин регуляризациясы жана жалгыздыгы” диссертациясы физика-математика илимдеринин доктору окумуштуу даражасын 01.01.02- дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча алуу үчүн сунушталган.

Урунттуу сөздөр: Биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер, биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер системы, көз карандысыз эки өзгөрүлмөлүү, жалгыздык, регуляризация.

Изилдөөнүн объектиси: Көз карандысыз эки өзгөрүлмөлүү биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелердин жана биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер системынын ар түрдүү аймактагы чечимдеринин жалгыздыгы жана регуляризациясы маселелерин изилдөө.

Изилдөөнүн максаты: Көз карандысыз эки өзгөрүлмөлүү биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелердин жана биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер системасынын ар түрдүү аймактагы чечимдеринин регуляризациясын тургузуу,чечимдеринин жалгыздыгын далилдөө жана теңдемелердин ар түрдүү корректүү көптүктөрдөгү туруктуулук бааларын алуу.

Изилдөөнүн ыкмасы: Бул иште функционалдык анализдөөнүн ыкмалары жана терс эмес квадраттык формалардын ыкмасы колдонулду.

Илимий жаңылыгы: Негизги алынган иштин бардык жыйынтыктары жаңы болуп эсептелинет. Көз карандысыз эки өзгөрүлмөлүү биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелердин жана системынын ар түрдүү аймактагы чечимдеринин жалгыздыгы жөнүндөгү теоремалар далилденди. $L_2(G)$ жана $L_{2,n}(G)$ мейкиндигинде регуляризациялоо теңдемелери тургузулду, о.э. ар түрдүү корректүү көптүктөрдөгү туруктуулук баалары алынган. Алынган теориялык жыйынтыктар илим менен техниканын ар түрдүү тармактарында колдонулушу мүмкүн.

РЕЗЮМЕ

Каденова Зууракан Ажимаматовна

Диссертация “Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными” представлена на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02- дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Ключевые слова: Линейные интегральные уравнения первого рода, система линейных интегральных уравнений первого рода, с двумя независимыми переменными, единственность, регуляризация.

Объект исследования: Исследованию вопросов регуляризация и единственности решений линейного интегрального уравнения и систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в различных областях.

Цель работы: Построение регуляризирующих уравнений для решения линейных интегральных уравнений и систем уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в различных областях**,** доказательство теорем единственности и получение оценки устойчивости для таких уравнений в разных семействах множеств корректностей.

Методы исследования: В работе используются методы функционального анализа и метод квадратичных форм.

Научная новизна: Все основные результаты работы являются новыми. Доказаны теоремы единственности решений линейных интегральных уравнений и систем уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в различных областях. Построены регуляризирующие уравнения в пространстве $L_2(G)$ **и** $L_{2,n}(G)$, а также получены оценки устойчивости в разных семействах множеств корректностей. Работа носит теоретический характер. Полученные теоретические результаты могут быть применены в различных областях науки и техники.

SUMMARY

Kadenova Zuurakan Ajimamatovna

The dissertation «Regularization and uniqueness the solution of linear integral equations of the first kind with two independent variables» is required to the completion of science degree the doctor of the physical-mathematical sciences by specialty 01.01.02 differential equations. Two variables first kind of linear integral equation solution uniqueness and regularization.

Key words: integral equations first kind, system linear of integral equations or the first kind, with two independent variables, uniqueness, regularization.

The object of research: The Research of questions regularization and uniqueness of solutions linear integral equation and system of linear integral equation of the first kind with two independent variables in different spheres.

The aim of the work: The building regularization operators for solution linear integral equations and system equations of the first kind with two independent variables in different spheres, the argument theorem of uniqueness and getting marks of stability for such equations in different families a lot of correctness's.

The method of research: in work utilize method of functional analyses and method of quadratic forms.

Science newness: All the main results of the work are new. Proved theorem uniqueness solutions of liner integral equations and system equations of the first kind with two variables in different spheres. Built regularization equation in the space $L_2(G)$ and $L_{2,n}(G)$, and also have got marks of stability in different families a lot of correctness's. The work is in a theoretical character. Getting theoretical results can be used in different spheres of science and techniques.