НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ж. БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.15.513

На правах рукописи

УДК 517.9

АЙТБАЕВ КУБАТ АСАНАЛИЕВИЧ

РАЗРЕШИМОСТЬ И СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02.-дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2016

Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, с.н.с. **Байзаков А.Б.**
Официальные оппоненты:	доктор физико- математических наук, профессор, член-корр. НАН КР **Алымкулов К.**
	кандидат физико-математических наук, доцент **Курманбаева А.К.**
Ведущая организация:	Казахский национальный университет им**.** Аль-Фараби. Адрес: Республика Казахстан, 050038, г.Алматы, пр. Аль-Фараби, 71.

Защита диссертации состоится 13 мая 2016 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 01.15.513 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720054, г. Бишкек , ул. Абдымомунова 328, лабораторный корпус №6 КНУ, аудитория 211.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН КР, Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

.

Автореферат разослан «__ » _____2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Широкое применение результатов, полученных в теории динамических систем, в последние десятилетия в технике привело к необходимости повышения точности в анализе исследуемых явлений, а также к описанию эффектов, которые не могли учитываться линейными теориями. Многие задачи прикладного характера, в частности задачи дифференциальных и интегральных уравнений, по своей сущности являются нелинейными. Нелинейные задачи дифференциальных и интегральных уравнений из-за сложности их исследования и недостаточной разработанности методов их решения мало изучены. Поэтому исследование разрешимости начальных задач динамических систем, разработка конструктивных методов их решения является одной из актуальных задач в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

Из анализа имеющихся работ следует, что многие актуальные вопросы теории нелинейных дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений в частных производных (ДУ в ЧП, ИДУ в ЧП), интегральных (интегро-дифференциальных) уравнений Вольтерра (ИУВ и ИДУВ), которые входят в класс нелинейных динамических систем, все еще остаются до сих пор не рассмотренными. Среди различных задач, возникающих в теории нелинейных динамических систем, несомненно актуальными, как для самой теории, так и для приложений, являются проблемы: разрешимость и структура решений задачи Коши ДУ в ЧП (ИДУ в ЧП); асимптотической и аналитической структуры решений в ИУВ, ИДУВ вблизи регулярных особых точек; структура обобщенных решений двумерных ИУВ с особой точкой.

Цели и задачи исследования. Настоящая диссертационная работа примыкает к исследованиям В.Вольтерра, А.Пуанкаре, Я.Горна, Э.И.Грудо, Н.А.Магницкого, Я.В.Быкова, М.Иманалиева, К.Алымкулова, П.С.Панкова, К.Какишова, А.Асанова, Т.М.Иманалиева, А.Б.Байзакова, А.К.Курманбаевой. Она посвящена применению метода преобразования решений в теории нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений и поставлена цель:

- исследовать разрешимость и структуры решений задачи Коши нелинейных ДУ в ЧП (ИДУ в ЧП);
- получение достаточных условий разрешимости и структуры решений задачи Коши систем нелинейных ДУ в ЧП (ИДУ в ЧП);
- нахождение асимптотической и аналитической структуры решений ИУВ и ИДУВ вблизи особых точек;
- получение достаточных условий существования обобщенных решений двумерных ИУВ с особой точкой.

Методика исследований. В настоящей работе использованы методы эквивалентного преобразования дифференциальных и интегральных уравнений, методы аналитической и асимптотической теории дифференциальных уравнений, метод мажорантных функций, методы

функционального анализа (принцип сжатых отображений) и свойства обобщенных функций.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения:

1. Установлена разрешимость и построены структуры решений задачи Коши дифференциальных уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков;
2. Найдены достаточные условия разрешимости задачи Коши интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго и третьего порядков;
3. Приведены достаточные условия существования однопараметрического семейства решений нелинейных ИУВ при больших значениях аргумента и выделены их главные члены;
4. Дано разложение решений в виде обобщенно-степенного ряда нового класса нелинейного ИДУВ в окрестности регулярной особой точки;
5. Построена структура решений линейных систем ИУВ с иррегулярной особой точкой;
6. Найдены обобщенные решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с двумя независимыми переменными.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные научные результаты являются новыми в теории нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться для получения других конкретных результатов в различных разделах теории нелинейных ИУВ, ИДУВ; уравнений математической физики, а также в приложениях динамических систем к естественно-техническим объектам; в научных исследованиях ИТПМ НАН КР, КНУ им.Ж.Баласагына, КРСУ им. Б.Ельцина, БГУ им. К.Карасаева и при разработке спецкурсов для математических специальностей Вузов КР.

Связь работы с научно-исследовательскими проектами: Работа выполнена в рамках проектов по Институту теоретической и прикладной математики НАН КР:
«Развитие и приложения аналитических, асимптотических и вычислительных методов в теории динамических систем» (2005-2007гг), № госрегистрации 0003851; «Асимптотические, аналитические и численные методы в теории нестационарных систем, описываемых дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями; и их приложения» (2008-2010гг), № госрегистрации 0005171; «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем» (2011-2013гг), № госрегистрации 0006227; «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических и аналитических методов в теории динамических систем, обратных и оптимизациоинных экономических задач и в анализе геофизических данных для оперативного прогноза землетресений» (2012-2014гг), № госрегистрации 0005756.

Результаты работы включены в заключительные и промежуточные отчеты по этим проектам.

Апробация результатов диссертации. Результаты настоящей диссертации доложены и обсуждены на следующих семинарах: Института теоретической и прикладной математики НАН КР, кафедры дифференциальных уравнений факультета Математики, информатики и кибернетики КНУ им. Ж. Баласагына и на следующих конференциях: Международной научной конференции «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики», Алматы, 2005г., Всемирный III Конгресс математических обществ тюркских стран (г.Алматы, июнь-июль 2009г.), Азиатская международная школа семинар «Проблемы оптимизации сложных систем», Казахстан, г. Усть Каменногорск, 2010г., Международной научной конференции посвященный 80-летию академика М.И.Иманалиева “Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике”, Бишкек, 2011г., Международной научной конференции посвященный 70-летию академика А.Жайнакова “Информационные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании”, Бишкек, 2011г., Международной научной конференции «Функциональный анализ и его приложения», Астана, 2012г., Республиканская конференция с участием ученых стран СНГ “Современные проблемы дифференциальных уравнений и их применения”, Ташкент, 2013г., II Международной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвященная 20-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета и 100-летию основателя математической школы в Кыргызстане профессора Я. В. Быкова, Бишкек, 2013г., Всемирный V Конгресс математиков тюркского мира, Иссык Куль, Аврора, 2014г., Международной научно-практической конференции «Информационные технологии: инновации в науке и образовании», Казахстан, Актобе, 2015г., Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и информатики», посвященная 80летию со дня рождения академика НАН РК Касымова К.А., г.Алматы, 2015г.

Публикации по теме диссертации. Основное содержание диссертации были опубликованы в работах [1-12].

В [1-5, 9, 10, 12] постановки задач принадлежат соавторам, а соискателю – распространение метода преобразования решений на конкретные операторы и вывод конкретных результатов по этой методике.

Структура, объем и краткое содержание диссертации. Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения, списка литературы, содержащего 109 наименований. Нумерация уравнений и соотношений, исключая Введение – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе. Объем текста 100 страниц.

Перейдем к краткому изложению содержания диссертации.

В первой главе приведены необходимые сведения и определения, обзор результатов: по теории существования решений задачи Коши ДУ в ЧП (ИДУ в ЧП); аналитической и асимптотической теории нелинейных ИУВ с особыми точками.

Во второй главе диссертации изучены разрешимость решений задачи Коши ДУ и ИДУ в ЧП.

В §2.1 исследована разрешимость решений задачи Коши и ее структура для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка:

$$u_{xxt}(t,x)+u_{xx}(t,x)+a(t,x)\,u_t(t,x)+b(t,x)\,u_x(t,x)+d(t,x)\,u(t,x)= \\ = f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x)), \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(0,x)=\varphi(x). \tag{2}$$

Пусть

$$H(t,c(t,x))=c_{xxt}(t,x)+c_{xx}(t,x)+a(t,x)c_t(t,x)+b(t,x)c_x(t,x)+d(t,x)c(t,x),$$

где $c(t,x)\in\overline{C}^{(2,1)}([0,T]\times R)$ - известная функция, такая, что

$$c(0,x)=\varphi(x).$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия

1) $H(t,c(t,x))\in\overline{C}^{(1,2)}([0,T]\times R\to R),T>0$;

2) $f(t,x,u,v,\omega)\in\overline{C}([0,T]\times R\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L|_u,L|_{u_t},L|_{u_x}\right)$.

Тогда $\exists T_0$, такое, что задача (1)-(2) имеет решение $u(t,x)\in\overline{C}^{(2,1)}([0,T_0]\times R)$, которое представимо в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x K(t-s,x-\nu)Q(s,\nu)d\nu ds.$$

Задача (1)-(2) методом преобразования решений приведена к ИУ

$$Q(t,x)=\frac{1}{K_x(0,0)}\Bigg\{f\Bigg[t,x,c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x K(t-s,x-\nu)Q(s,\nu)d\nu ds,\ c_t(t,x)+ \\ +\int_{-\infty}^x K(0,x-\nu)Q(t,x)d\nu+\int_0^t\int_{-\infty}^x K_t(t-s,x-\nu)Q(s,\nu)d\nu ds,\ c_x(t,x)+ \\ +\int_0^t\int_{-\infty}^x K_x(t-s,x-\nu)Q(s,\nu)d\nu ds\Bigg]- \\ -\int_0^t\int_{-\infty}^x\left[a(t,x)K_t(t-s,x-\nu)+b(t,x)K_x(t-s,x-\nu)+d(t,x)K(t-s,x-\nu)\right]Q(s,\nu)d\nu ds- \\ -a(t,x)\int_{-\infty}^x K(0,x-\nu,0)Q(t,\nu)d\nu-\int_{-\infty}^x K_{xx}(0,x-\nu,0)Q(t,\nu)d\nu-H(t,c(t,x))\Bigg\},$$

к которому применен принцип сжатых отображений.

В §2.2 изучена разрешимость и структура решений задачи Коши для нелинейных ДУ в ЧП третьего порядка.

Рассмотрено уравнение

$$u_{ttx}+2\alpha u_{tx}+\beta u_{tt}+u_x+\alpha(\alpha+2\beta)u_t+\alpha^2\beta u=f(t,x,u) \qquad (3)$$

с начальными условиями (2) и

$$u_t(0,x)=\psi(x). \qquad (4)$$

Теорема 2. Пусть

$$f(t,x,u)\in\overline{C}([0,T]\times R\times R)\cap Lip(L_u), \qquad \frac{L}{\alpha\beta}<1.$$

Тогда ДУ в ЧП третьего порядка (3) с начальными условиями (2), (4) имеет решение

$$u(t,x)\in\overline{C}^{(2,1)}([0,T_0]\times R),$$

которое имеет интегральное представление в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}\sin(t-s)Q(s,v)dvds.$$

В §2.3 предложен метод исследования разрешимости задачи Коши для ДУ в ЧП четвертого порядка с параметром и найдено интегральное представление искомых решений

$$\begin{aligned}&\varepsilon^3u_{ttxy}(t,x,y)+2\varepsilon^2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\varepsilon^2\beta u_{tty}(t,x,y)+2\varepsilon\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)\ +\\&+\varepsilon\alpha^2u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+\varepsilon^{3\gamma}u_{ttx}(t,x,y)+2\varepsilon^2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\varepsilon^2\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+\\&+2\varepsilon\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)\ +\ \varepsilon\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=f\big(t,x,y,\varepsilon,u(t,x,y)\big),\end{aligned} \qquad (5)$$

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y,\varepsilon), \qquad (6)$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y,\varepsilon), \qquad (7)$$

где $\alpha,\beta,\gamma\in R_+\equiv(0,+\infty)$. ε – параметр.

Теорема 3. Пусть

$$f(t,x,y,\varepsilon,u)\in\overline{C}\big([0,T]\times R\times R\big)\cap Lip\big(L|_u\big), \qquad \frac{LT_0}{\alpha\beta\gamma}<1,\ T_0\le T.$$

Тогда задача Коши (5)-(7) имеет решение $u(t,x,y)\in\overline{C}^{(1,1,1)}\big([0,T_0]\times R\times R\big)$, которое представимо в виде

$$u(t,x,y,\varepsilon)=c(t,x,y,\varepsilon)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y(t-s)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\mu)-\frac{\gamma}{\varepsilon}(y-\nu)}\frac{1}{\varepsilon^3}Q(s,\mu,\nu,\varepsilon)dvd\mu ds,$$

где $c(t,x,y,\varepsilon)$ - известная функция такая, что

$$c(0,x,y,\varepsilon)=\varphi(x,y,\varepsilon),c_t(0,x,y,\varepsilon)=\psi(x,y,\varepsilon).$$

В §2.4 исследована разрешимость решений задачи Коши и ее структура для нелинейных ДУ в ЧП четвертого порядка.

I. В этом подразделе рассмотрена ДУ в ЧП четвертого порядка

$$\begin{aligned}&u_{tttx}(t,x)+u_{ttt}(t,x)+a(t,x)u_{tt}(t,x)\ +\\&+b(t,x)u_t(t,x)+m(t,x)\ u_x(t,x)+n(t,x)\ u(t,x)=\\&=\ f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tt}(t,x))\end{aligned} \qquad (8)$$

с начальными условиями (2) и

$$u_t(0,x)=\psi(x), \qquad (9)$$

$$u_{tt}(0,x)=\gamma(x). \qquad (10)$$

Теорема 4. Пусть

$a(t,x),\ b(t,x),\ m(t,x),\ n(t,x)\ \in G_1\ ,\ G_1\equiv\bar{C}([0,T]\times R),\ T>0;$

$f(t,x,u,v,\omega,\psi)\in G_2\cap Lip\left(L\big|_u,L\big|_{u_t},L\big|_{u_x},L\big|_{u_{tt}}\right), G_2\equiv\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\times R\times R\right),$

$\varphi(x),\psi(x),\gamma(x)\in\bar{C}^{(1)}(R)$, $\quad M\equiv\max\limits_{G_2}\left|f(t,x,u,v,w)\right|.$

$K(0,x)=0,\ K_t(0,x)=0,\ K_{tt}(0,0)\neq 0;$

$K(0,x)+K_x(0,x)\equiv 0;\ K_t(t,x)+K_{tx}(t,x)\equiv 0;$

$K_{tt}(t,x)+K_{ttx}(t,x)\equiv 0;\ K_{ttt}(t,x)+K_{tttx}(t,x)\equiv 0.$

$\left|K_{tt}(0,0)\right|^{-1}q<1,\quad t\in[0,T_0].$

Тогда $\exists T_0$ такое, что задача Коши (8), (2), (9)-(10) имеет решение $u(t,x)\in\bar{C}^{(2,1)}([0,T_0]\times R)$, которое представимо в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x K(t-s,x-\nu)Q(s,\nu)d\nu ds,$$

где $c(t,x)\in\bar{C}^{(2,1)}([0,T]\times R)$ - известная функция, такая, что

$$c(0,x)=\varphi(x),\ c_t(0,x)=\psi(x),\ c_{tt}(0,x)=\gamma(x).$$

Кроме того, все производные, входящие в уравнение (8), равномерно ограничены.

II. Во втором подразделе, рассмотрено ДУ в ЧП четвертого порядка

$$\begin{aligned}&u_{xxxt}+u_{xxx}+3\beta u_{xxt}+3\beta u_{xx}+\left(3\beta^2+1\right)u_{xt}+\beta(\beta^2+2)u_t+\left(3\beta^2+\alpha\right)u_x+\\&+\beta\left(\beta^2+\alpha+1\right)u=f(t,x,u(t,x)),\end{aligned} \qquad (11)$$

с начальным условием (2)

где $\alpha,\beta\in R_+$. Обозначим

$$\begin{aligned}&H\left(t,c(t,x)\right)=c_{xxxt}\left(t,x\right)+c_{xxx}\left(t,x\right)+3\beta c_{xxt}\left(t,x\right)+\beta(\beta^2+2)c_t\left(t,x\right)+\\&+\left(3\beta^2+1\right)c_{xt}\left(t,x\right)+3\beta c_{xx}\left(t,x\right)+\left(3\beta^2+\alpha\right)c_x\left(t,x\right)+\beta\left(\beta^2+\alpha+1\right)c\left(t,x\right).\end{aligned}$$

где $c(t,x)\in\bar{C}^{(1,3)}([0,T]\times R)$ - известная функция, такая, что $c(0,x)=\varphi(x)$.

Теорема 5. Пусть

$f(t,x,u)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\right)\cap Lip\left(L\big|_u\right),\ H(t,x)\in\bar{C}^{(1,3)}([0,T]\times R),$

$$\frac{2L}{\alpha\beta}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)+\frac{1}{\beta}<1.$$

Тогда задача Коши (11), (2) имеет решение $u(t,x)\in\bar{C}^{(1,3)}([0,T_0]\times R)$, которое представимо в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}\left[1-\cos(x-\nu)\right]Q(\nu,s)d\nu ds.$$

В §2.5 найдены достаточные условия существования решений задачи Коши ИДУ в ЧП второго порядка с точкой поворота и выявлены структура этих решений.

Рассмотрена система уравнений

$$\varepsilon^2 u_{tx}(t,x)+\varepsilon\left(u_t(t,x)+u_x(t,x)\right)+A(t,x)u(t,x)=$$
$$=f(t,x,u(t,x),\varepsilon)+\int_0^t K\left(t,x,\tau,u(\tau,x),\varepsilon\right)d\tau, \qquad (12)$$

с начальным условием (2), где $\varphi(x)$ – известная вектор функция, $A(t,x)=\sum_{k=1}^{m} A_k(t-t_k)^k B_k(t,x),\ A_k=const,\ B_k(t,x)$ - заданные непрерывные матрицы $k=\overline{1,m}\ ,0\le t_k\le 1,\quad t_k$ – заданные точки, $A(t,x)-n$ мерная матрица, $f(t,x,u,\varepsilon),K(t,x,\tau,u,\varepsilon)$ – заданные n- мерные вектор-функция., $x\in R_1$, u - искомый вектор столбец $u=colon(u_1,u_2,...,u_n)$, ε - параметр.

Теорема 6. Пусть $A(t,x)\in\overline{C}\left([0,T]\times R\right)$, $\|A(t,x)\|\le M_A=const$, $f(t,x,u)\in\overline{C}\left([0,T]\times R\right)\cap Lip\left(L_1|_u\right), K(t,x,\tau,u)\in\overline{C}\left((0\le\tau\le t\le T)\times R\right)\cap Lip\left(L_2|_u\right)$, $\dfrac{L_1+L_2T_0+M_A+\alpha+\beta}{\alpha\beta}<1.,\ \varphi(x)\in\overline{C}^{(1)}(R),\ T_0\le T$,

где $\alpha,\beta\in R_+$. Тогда $\exists T_0>0$, такое, что задача Коши (2) имеет решение $u(t,x)\in\overline{C}^{(1,1)}\left([0,T_0]\times R\right)$, представляемое в виде

$$u(t,x)=\varphi(x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}s+\frac{\beta}{\varepsilon}\rho}\frac{1}{\varepsilon^2}Q(s,\rho)d\rho ds.$$

Пример 1. Невырожденное уравнение соответствующее (12)

$$A(t)u=f(t),$$

в окрестности нуля $A(t)$, может не иметь ограниченных решений. В то время возмущенное уравнение в силу теоремы 6 имеет ограниченное решение. Например, невозмущенное уравнение (ядро в уравнении (12) $K(t,x,\tau,u)\equiv 0$)

$$\sin tu=1,$$

в окрестности точки $t=0$ не имеет ограниченных решений.

А, задача Коши для соответствующего возмущенного уравнения

$$\varepsilon^2 u_{tx}(t,x)+\varepsilon\left(u_t(t,x)+u_x(t,x)\right)+sintu=1,$$
$$u(0)=1$$

по доказанной теореме 6 имеет ограниченное решение.

В §2.6. I. рассмотрена задача Коши ИДУ в ЧП третьего порядка

$$u_{txx}+\alpha u_{xx}+2\beta u_{tx}+2\alpha\beta u_x+\left(\beta^2+1\right)u_t+\alpha\left(\beta^2+1\right)u=f(t,x,u)+\int_0^t K\left(t,x,\tau,u(\tau)\right)d\tau \qquad (13)$$

с начальным условием (2), где $\varphi(x)\in C'(R)$, а $\alpha,\beta\in R_+$.

Решение задачи Коши (13), (2) найдено в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\rho)}\sin(x-\rho)Q(s,\rho)d\rho ds,$$

где $c(t,x)$ - известная непрерывная функция, причем $c(o,x)=\varphi(x)$, $Q(t,x)$ - новая искомая функция, которая определяется как решение нелинейного ИУВ.

Во II подразделе этого же параграфа найдены достаточные условия существования решений задачи Коши ИДУ в ЧП третьего порядка и структура этих решений. Рассмотрено уравнение

$$u_{txy}(t,x,y)+\alpha u_{xy}(t,x,y)+\beta u_{ty}(t,x,y)+\gamma u_{tx}(t,x,y)+\alpha\beta u_y(t,x,y)+\beta\gamma u_t(t,x,y)+$$

$$+\alpha\gamma u_x(t,x,y)+\alpha\beta\gamma u(t,x,y)=f(t,x,y,u(t,x,y))+\int_0^t K(t,x,y,r,u(r,x,y))dr, \qquad (14)$$

с начальным условием

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y), \qquad (15)$$

где α,β,γ - некоторые положительные постоянные, $f(t,x,y,u)$, $K(t,x,y,r,u)$- заданные функции.

Теорема 7. Пусть

$$f(t,x,y,u)\in\overline{C}([0,T]\times R\times R)\cap Lip\left(L_1\big|_u\right),$$

$$K(t,s,x,r,u)\in\overline{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L_2\big|_u\right),\ \frac{L+L_1T}{\alpha\beta\gamma}<1.$$

Тогда $\exists T_0>0$, такое, что задача Коши (14)-(15) имеет решение $u(t,x,y)\in\overline{C}^{(1,1,1)}([0,T_0]\times R\times R)$, которое представимо в виде

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds,$$

$c(t,x,y)$ - известная функция такая, что $c(0,x,y)=\varphi(x,y)$ где α,β,γ - положительные постоянные.

В главе III изучены нелинейные интегральные системы с особыми точками и построена аналитическая и асимптотическая теория нелинейных ИУВ и ИДУВ с особыми точками.

В §3.1 в неограниченной области рассмотрено ИУВ

$$tu(t)=\lambda\int_{+\infty}^t u(s)ds+\int_{+\infty}^t K(t,s,u(s))ds,\ \ t\in(T,+\infty). \qquad (16)$$

Теорема 8. Пусть выполнены условия

а) $\lambda<0$;

б) функция $K(t,s,u)\in C\{(D\times R)\cup\|u\|\le h\}$, $K(t,s,0)\equiv 0$ и удовлетворяет условию $K(t,s,u)\in Lip\left(N(t,s)\big|_u\right)$, $N(t,s)$ - неотрицательная, невозрастающая функция по каждой из своих переменных, удовлетворяющая условию

$$t^{-\lambda-1}\int_{+\infty}^t s^{\lambda-1}N(t,s)ds\to 0,\ \ при\ \ t\to+\infty;$$

в) несобственные интегралы, стоящие в правой части (16) сходятся.

Тогда $\exists T_1<+\infty$ такое, что ИУВ (16) имеет однопараметрическое семейство решений $u(t,c)\in C(T_1,+\infty)$, обладающим свойством

$u(t,c)=ct^{\lambda-1}+o\left(ct^{\lambda-1}\right)$ при $t\to+\infty$, а также при $c\to 0$, $u(t,c)\in Lip\left(Kt^{\lambda-1}\big|_c\right)$, где K – положительная постоянная.

Пример 2. ИУВ

$$tu(t)=\int_{+\infty}^{t}\left(-2+4s^{-1}\right)u(s)ds,\ \ \lambda=-2$$

имеет решение

$$u(t)=c\left(t^{-3}+\frac{4}{3}t^{-4}+...\right),\ \text{т.е.}$$

$$u(t)=ct^{-3}+o\left(ct^{-3}\right),\ t\to+\infty.$$

В §3.2 изучена аналитическая структура решений нелинейных ИДУВ в окрестности регулярной особой точки:

$$t\frac{du(t)}{dt}=\lambda u(t)+\int_{0}^{t}K(t,s,u(s),u^{\frac{p_1}{q_1}}(s),...,u^{\frac{p_k}{q_k}}(s))ds+f(t),\qquad(17)$$

где $p_i>q_i>1$ - целые числа, $i=1,2,...,k$, $u\in C([0,\Delta]\to R_+)$, λ -параметр.

Теорема 9. ИДУВ с регулярной особой точкой (17) при условиях

a) $K(t,s,u,w_1,...,w_k)$ - голоморфная в окрестности $t=s=u=w_1=...=w_k=0$ функция и $K(t,s,0,...,0)\equiv 0,\ \dfrac{\partial K(0,...,0)}{\partial u}=0$;

b) $\dfrac{p_i}{q_i}$ $(i=1,...,k)$ - несократимые дроби;

c) $\lambda>0$;

имеет семейство голоморфных решений по степеням *t* и *z(t)* вида

$$u(t)=z^q(t)\left(1+\sum_{i+j\geq 1}p_{ij}t^iz^j(t)\right),$$

где $z(t)=Ct^{\frac{\lambda}{q}}$, $C\in R_+$, q – наименьшее общее кратное чисел q_i, $\alpha_i:=q/q_i$.

В §3.3 рассмотрена система линейных ИУВ с иррегулярной особенностью в точке $t=0$ вида:

$$t^qu(t)=\int_0^t p(t,s)K(t,s)u(s)ds,\quad(0<t<T),\qquad(18)$$

где $p(t,s)-$такая положительная, однородная $q-1$ степени функция. Обозначим

$$\varphi_k=\int_0^t\tau^kp(1,\tau)d\tau.$$

Если

a) матрица *K(t,s)* имеет непрерывные производные по *t* до порядка k_0, где k_0 определяется из неравенства

$$\varphi_{k_0}<\left\{\max_{0<s<t<T}\|K(t,s)\|\right\}^{-1};$$

b) матрица $K(0,0)$ имеет собственный и присоединенные к нему векторы, отвечающие числу $\dfrac{1}{\varphi_0}$;

c) числа $\frac{1}{\varphi_i}$ $(i=1,2,...,k_0-1)$; не являются собственными числами матрицы $K(0,0)$, то можно подобрать коэффициенты a_i, b_i $(i=\overline{1,k_0-1})$ многочленов $p(t)$, $q(t)$ так, чтобы они были непрерывными функциями на $[0, T]$.

Теорема 10. Если выполнены условия a), b), c), то существует решение уравнения (18) вида

$$u(t)=p(t)\ln t+t^k u_k \ln t+q(t)+t^k v_k(t),$$

с $k=k_0$, где $u_{k_0}(t)$ и $v_{k_0}(t)$ - непрерывные функции на $[0, T]$, $p(t)$ и $q(t)$ – полиномы степени не выше k_0-1.

Пример 3. Интегральное уравнение Вольтерра с иррегулярной особой точкой

$$t^2u(t)=-\int_0^t (2t-6s)u(s)ds$$

имеет решение

$$u=b_0+b_1t,$$

где $b_0=2C_1,\ b_1=6C_2,\ C_1,\ C_2-const$.

В рассмотренном примере $K(t,s)\equiv 1,\ \ p(t,s)=-2t+6s$ - есть однородная функция степени 1.

В §3.4 рассмотрено ИУВ III рода

$$t_1t_2u(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}K(t_1,t_2.s_1,s_2)u(s_1,s_2)ds_1ds_2+f(t_1,t_2), \qquad (19)$$

$$\Pi=\{t_1,t_2:\ 0\le t_1,t_2\le T\}.$$

Теорема 11. Если

$K(t_1,t_2,s_1,s_2)=\lambda^2+K_1(t_1,t_2,s_1,s_2);\ f(t_1,t_2)=f(0,0)+t_1t_2f_1(t_1,t_2);$

$K_1(t_1,t_2,s_1,s_2)\in C(0\le s_i\le t_i\le T,\ i=1,2);\ \ f_1(t_1,t_2)\in C(\Pi);$

$f(0,0)\ne 0;\ 0<\lambda^2<1,$

то уравнение (19) имеет обобщенное решение вида

$$u(t_1t_2)=c\delta_\Pi(t_1)\delta_\Pi(t_2)+\omega_1(t_1,t_2)+\omega_2(t_1,t_2),$$

где $c=-\frac{f(0,0)}{\lambda^2};\ \omega_i(t_1,t_2)\in C(\Pi), i=1,2.$

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, с.н.с. А.Б.Байзакову за постановку задач, ценные советы, предложения и замечания, сделанные им при подготовке данной диссертационной работы.

Основное содержание диссертации полностью отражено в следующих публикациях:

1. Айтбаев К.А. О достаточном условии существования однопараметрического семейства решений интегрального уравнения Вольтерра [Текст] / А.Б.Байзаков, К.А.Айтбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.35. – С. 84-88.
2. Айтбаев К.А. О структуре решений интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Б.Байзаков, К.А.Айтбаев // Проблемы оптимизации сложных систем: Труды III Международной азиатской школы-семинара. – Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2007. – сер. Информатика. – Вып. 7. – С. 174-180.
3. Айтбаев К.А. О разрешимости задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / М.Иманалиев, А.Б.Байзаков, К.А.Айтбаев // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Тр. IV междунар.науч.конф.,посв.80-летию акад. М.Иманалиева. – Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – Бишкек: КНУ, 2011. – Спец. вып. – С. 15-18.
4. Айтбаев К.А. Об одном методе решения задачи Коши для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / М.Иманалиев, А.Б.Байзаков, К.А.Айтбаев // Информационные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании: Мат-лы Междунар. конф., посв. 70-летию академика А.Жайнакова. – Известия КГТУ им. И.Раззакова №24. - Бишкек, 2011. – С. 57-61.
5. Айтбаев К.А. Разрешимость задачи Коши интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с точкой поворота [Текст] / М.Иманалиев, А.Б.Байзаков, К.А.Айтбаев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2012. – Вып. 45.- С. 5-10.
6. Aitbaev K.A. On the existence of the solutions of Cauchy problem for nonlinear partial differential equations [Текст] / K.A.Aitbaev // Proceedings of the V Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Bishkek, 2014. – P. 150-154.
7. Айтбаев К.А. О задаче Коши интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [Текст] / К.А.Айтбаев // Материалы междунар. Науч.-практической конф. «Информационные технологии: Инновации в науке и образовании». – Актобе, 2015.- С. 116-120.
8. Айтбаев К.А. Разрешимость решений задачи Коши и ее структура для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / К.А.Айтбаев // Известия Вузов Кыргызстана. – Бишкек, 2015. - №9. – С. 3-7.

9. Айтбаев К.А. О разрешимости задачи Коши интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / А.Б.Байзаков, К.А.Айтбаев // Международный Научный Институт "Educatio" XI (18), 2015. – С. 107-110

10. Айтбаев К.А. О решениях линейных уравнений Вольтерра с иррегулярной особенностью [Текст] / А.Б.Байзаков, К.А.Айтбаев // Наука, новые технологии и инновации. – Бишкек, 2015. - №6. – С. 12-14.

11. Айтбаев К.А. Достаточные условия существования обобщенных решений двумерных интегральных уравнений Вольтерра III рода [Текст] / К.А.Айтбаев // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – Москва, 2016. - №2-1. – с. 7-11, импакт-фактор РИНЦ - 0,043

12. Айтбаев К.А. Об одном методе решения задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / А.Б.Байзаков, К.А.Айтбаев // Приволжский научный вестник. – Ижевск, 2016. – № 1 (53). – с. 5-9, импакт-фактор РИНЦ - 0,146

РЕЗЮМЕ

Айтбаев Кубат Асаналиевич

«Сызыктуу эмес дифференциалдык жана интегралдык теңдемелердин чыгарымдуулугу жана чыгарылыштарынын структуралары» темасы боюнча, 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу деген адистик боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын алуу үчүн сунушталган диссертация

Урунттуу сөздөр: интегралдык теңдеме, интегро-дифферециалдык тендеме, регулярдык өзгөчө чекит, жалпыланган чыгарылыштар, айрым туундулуу дифференциалдык теңдемелдемердин Коши маселеси, айрым туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелердин Коши маселеси.

Изилдөөнүн объектиси: сызыктуу эмес дифференциалдык жана интегралдык тендемелердин чыгарымдуулугу жана чыгарылыштарынын структуралары, дифференциалдык жана интегралдык тендемелердин чыгарылыштарынын аналитикалык жана асимптотикалык касиеттери, сызыктуу эки көз карандысыз өзгөрмөлүү үчүнчү тартиптеги Вольтерра интегралдык теңдемелеринин жалпыланган чыгарылыштары.

Иштин максаттары: Диссертациялык иш чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү методун сызыктуу эмес дифференциалдык жана интегралдык тендемелер теориясына колдонууга арналган жана анын максаты төмөнкүдөй: жекече туундулуу дифференциалдык (интегро-дифференциалдык) теңдемелери үчүн Коши маселесинин чыгарылыштарынын структурасын тургузуу жана чыгарымдуулукту изилдөө; Вольтерра интегралдык, интегро-дифференциалдык теңдемелеринин регулярдык өзгөчө чекитин айланасындагы асимптотикалык жана аналитикалык чыгарылыштардын структурасын табуу; өзгөчө чекиттүү Вольтерра эки өлчөмдүү интегралдык теңдемелеринин жалпыланган чыгарылыштарын түзүү.

Изилдөөнүн ыкмалары: Иште дифференциалдык жана интегралдык теңдемелерди өзгөртүп түзүү ыкмасы, дифференциалдык теңдемелердин аналитикалык жана асимптотикалык теориясынын жана функционалдык анализдин ыкмалары колдонулган.

Илимий жыйынтыктар: Үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги айрым туундулуу дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарылыштарынын структурасы тургузулду жана чыгарымдуулугу аныкталды; экинчи жана үчүнчү тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселеси чыгарылышка ээ болоорлугунун жетишээрлик шарттары табылды; сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык тендемелеринин аргументтин чоң маанилеринде бир параметрлүү чыгарылыштар тобунун жашашынын жетишээрлик шарттары келтирилди жана алардын баш мүчөлөрү көрсөтүлдү; жаңы класстагы сызыктуу эмес Вольтерра интегро-дифференциалдык теңдемелеринин регулярдык өзгөчө чекиттин айланасындагы чыгарылыштарынын жалпыланган даражалуу

катарга ажыратылышы берилди; иррегулярдуу өзгөчө чекиттүү Вольтерра сызыктуу интегралдык теңдемелер системаларынын чыгарылыштарынын структурасы тургузулду; көз карандысыз эки өзгөрмөлүү үчүнчү түрдөгү Вольтерра сызыктуу интегралдык теңдемелеринин жалпыланган чыгарылыштары түзүлдү.

РЕЗЮМЕ

Айтбаев Кубат Асаналиевич

диссертация «Разрешимость и структура решений нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений» представлена на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: интегральное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, регулярная особая точка, обобщенные решения, задача Коши для дифференциальных уравнений в частных производных, задача Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Объект исследования: разрешимость и структура решений нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений, аналитические и асимптотические свойства решений дифференциальных и интегральных уравнений, обобщенные решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с двумя независимыми переменными.

Цели работы: Настоящая диссертационная работа посвящена применению метода преобразования решений в теории нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений и ее целью являются:
исследование разрешимость и построению структуры решений задачи Коши дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений с частными производными; нахождение асимптотической и аналитической структуры решений в интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра вблизи регулярных особых точек; построение обобщенных решений двумерных интегральных уравнений Вольтерра с особой точкой.

Методика исследования: В работе использованы методы преобразования решений дифференциальных и интегральных уравнений, методы аналитической и асимптотической теории дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Научная новизна: Установлена разрешимость и построены структуры решений задачи Коши дифференциальных уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков; найдены достаточные условия разрешимости задачи Коши интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго и третьего порядков; Приведены достаточные условия существования однопараметрического семейства решений нелинейных ИУВ при больших значениях аргумента и выделены их главные члены; дано разложение решений в виде обобщенно-степенного ряда нового класса нелинейного ИДУВ в

окрестности регулярной особой точки; построена структура решений линейных систем ИУВ с иррегулярной особой точкой; найдены обобщенные решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с двумя независимыми переменными.

SUMMARY

Aitbaev Kubat Asanalievich

Dissertation «Solvability and structure of solutions of nonlinear differential and integral equations» submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences on specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: integral equation, integro-differential equation, regular singular point, the generalized solution, Cauchy problem for differential equations in partial derivatives, Cauchy problem for integro-differential equations in partial derivatives.

Object of research: the solvability and the structure of solutions of nonlinear differential and integral equations, analytic and asymptotic properties of solving differential and integral equations, generalized solutions for third kind linear Volterra integral equations with two independent variables.

Aims of research: This dissertation is devoted to use transform method in the theory of nonlinear differential and integral equations and its purpose are:

To analyze the solvability and construction of the structure of solutions for Cauchy problem of differential (integro-differential) partial differential equations; finding asymptotic and analytic structures of solutions in Volterra integral equations, Volterra integro-differential equations near regular singular points; construction of generalized solutions of two-dimensional Volter’s integral equations with a singular point.

Methods of research: We used methods of transformating solutions of differential and integral equations, methods of analytic and the asymptotic theory of differential equations and functional analysis.

Scientific novelty: Set the solvability and built the structure of solutions for the Cauchy differential equations in partial derivatives of third and fourth order; found sufficient conditions for the solvability of the Cauchy problem for integro-differential equations in partial derivatives of second and third order; Given sufficient conditions for existence of one-parameter families of solutions for nonlinear Volterra integral equations for large values of the argument and highlighted their main members; Given the expansion of solutions in the form of generalized power series for a new class of nonlinear integro-differential Volterra equations in a neighborhood of a regular singular point; Built structure of solutions for linear systems of Volterra integral equations with an irregular singular point; Found generalized solutions for the third kind linear Volterra integral equations with two independent variables.