НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Ж. БАЛАСАГЫНА

Диссертационный совет Д 01.12.001

На правах рукописи
УДК 517.9+513.83

Жораев Адахамжан Хамитжанович

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

специальность 01.01.04 – геометрия и топология

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2012

Работа выполнена в Кыргызско-Узбекском университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН КР **Панков Павел Сергеевич**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент **Таскараев Абилбек**

кандидат физико-математических наук, доцент **Эсенов Кубатбек Рыскулбекович**

Ведущая организация: Ошский государственный университет 714010, г. Ош, ул. Свердлова, 305.

Защита диссертации состоится «___» _________ 2012 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета Д 01.12.001 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата физико-математических наук при Институте теоретической и прикладной математики НАН Кыргызской Республики и Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, Чуйский проспект 265а.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке НАН Кыргызской Республики по адресу: Кыргызстан, 720071, г. Бишкек, проспект Чуй, 265-а.

Автореферат разослан “____” ___________ 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, д.ф.-м.н., ст.н.с. Искандаров С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Известно, какую роль в теории и приложениях математики играют топологические пространства, а также их подклассы: равномерные пространства, метрические пространства, многообразия. Вместе с тем, обзор литературы показывает, что до публикации работ А.А.Борубаева и П.С. Панкова не существовало методов конструктивного представления и исследования каких-либо классов топологических пространств, определенных, но с заранее неизвестной структурой. Целью настоящего исследования является, на основе этих работ, разработка методов единообразного исследования некоторых классов таких объектов с помощью компьютера на основе реального движения по непрерывным траекториям.

Актуальность темы обусловлена современными тенденциями в развитии математических исследований - разработке методов, дающих обоснование и возможности применения компьютерной техники для решения новых классов математических задач.

Для представления математических объектов, наряду с формально-логическими способами, всегда использовались графические представления. Вместе с тем, двумерные, а также трехмерные изображения дают адекватные представления только для ограниченных классов объектов. При появлении компьютеров, с их помощью сначала повторялись известные двумерные изображения. В 90-х годах прошлого века развитие вычислительной техники дало возможность качественно новых представлений математических объектов на компьютере, более соответствующих их сущности. Для естественного интерактивного представления непрерывных объектов на компьютере, в работах А.А.Борубаева и П.С.Панкова было введено определение и созданы основы теории новых математических объектов – кинематических топологических пространств, а также описаны примеры компьютерной реализации заранее известных пространств, для распознаваемости элементов в компьютерном представлении пространств было введено понятие локальной различимости пространства (наличие всюду плотного множества, ростки которого по окрестностям различных точек различны) и доказана такая различимость для подмножеств эвклидовых пространств и «более чем одномерных» кинематических пространств. Ими также были поставлены проблемы, которые необходимо решить для построения общей теории.

Однако в упомянутых работах рассматривались только отдельные, заранее заданные пространства, не был создан механизм для исследования свойств неизвестных пространств, не была доказана кинематичность пространств, получаемых такими способами, не были изучены свойства кинематических пространств.

Цели работы:

- найти необходимые и достаточные условия существования кинематики, согласованной с данной метрикой;
- перенести результаты о локальной различимости на более широкие классы пространств;
- ввести понятие размерности на основе кинематики и установить его связи и различия с ранее введенными определениями размерности;
- для адекватного отображения движения в кинематическом пространстве с дополнительными действиями расширить понятие интеграла первого рода;
- разработать методы единообразного представления римановых поверхностей с помощью движения и их алгоритмическую и компьютерную реализацию с использованием созданного в Кыргызстане метода доказательных вычислений;
- с помощью этих понятий установить достаточные условия кинематизируемости римановых поверхностей, определяемых алгебраическими и дифференциальными уравнениями, представляющими многозначные функции;
- построить и реализовать на компьютере алгоритмы исследования таких пространств, решений уравнений и многозначных функций с определением точек ветвления и рода поверхности, с наличием как управляемого пользователем, так и сплошного поиска, а также алгоритм приближенного вычисления интеграла первого рода по заданной траектории.

Методика исследования. В работе развивается теория кинематических пространств, используется метод перехода от дифференциальных уравнений к интегральным, метод дифференциальных неравенств и переход от них к интегральным уравнениям с дополнительными функциями, разработан новый метод использования сдвиговой функции для построения алгоритмов поиска.

Научная новизна работы. Основные научные результаты:

- найдены необходимые и достаточные условия существования кинематики, согласованной с данной метрикой;
- введено понятие кинематической размерности и установлены его связи и различия с ранее введенными определениями размерности;
- введены понятия функциональной цепи и сдвиговой прямолинейной функции над комплексной плоскостью, разработаны способы как приближенной, так и доказательной компьютерной реализации такой функции;
- с помощью этих понятий установлены широкие достаточные условия кинематизируемости римановых поверхностей, определяемых алгебраическими и дифференциальными уравнениями, представляющих многозначные функции;
- на их основе - построены и реализованы на компьютере алгоритмы исследования таких пространств, решений уравнений и многозначных функций с определением точек ветвления и рода поверхности, с наличием как управляемого пользователем, так и сплошного поиска по римановым поверхностям.

Теоретическая и практическая ценность.

Полученные теоретические результаты расширяют возможности применения компьютеров в исследовании различных объектов теории топологических пространств и дифференциальных уравнений в комплексной области, построенные алгоритмы могут быть применены для исследования объектов, порождаемых конкретными дифференциальными и алгебраическими уравнениями.

Основные положения, выносимые на защиту:

- введение определений «согласованности» и «полусогласованности» кинематики и метрики по порождаемым ими топологиям;

- достаточные условия существования кинематики, согласованной с данной метрикой;

- введение понятия почти-связно-замкнутого множества и на его основе – установление широких достаточных условий размечаемости топологических пространств;

- введение понятия кинематической размерности и ее установление для различных классов пространств;

- введение понятий функциональной цепи и сдвиговой прямолинейной функции над комплексной плоскостью и разработка способов как приближенной, так и доказательной компьютерной реализации такой функции;

- установление достаточных условий кинематизируемости римановых поверхностей, определяемых алгебраическими и дифференциальными уравнениями, представляющими многозначные функции;

- построение и реализация на компьютере новых алгоритмов исследования кинематических пространств с определением точек ветвления и рода поверхности, с наличием как управляемого пользователем, так и сплошного поиска по римановым поверхностям.

Работа выполнена в рамках проекта по Институту теоретической и прикладной математики НАН КР: "Асимптотические, аналитические и численные методы в теории нестационарных систем, описываемых дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями, и их приложения" (2008-2010 годы), номер гос. регистрации № 0005171. Результаты работы включены в отчеты по проекту.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались на семинарах:

- на семинаре кафедры "Информатика и технология обучения" КУУ;
- на семинаре Института теоретической и прикладной математики НАН КР (руководитель - академик М.И.Иманалиев);
- на семинаре «Актуальные вопросы математики и преподавания математики» ЖАГУ (руководитель - д.ф.-м.н. К.С.Алыбаев);
- на семинаре Института математики Министерства образования и науки РК;

- на семинаре кафедры геометрии Национального университета Узбекистана имени М.Улугбека;
на конференциях:
- на II международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (г. Бишкек, сентябрь 2006 г.);
- на Третьем конгрессе Всемирного Математического общества тюркоязычных стран (г. Алматы, июль 2009 г.).

Публикации по теме диссертации:

Опубликованы статьи [1], [4], [5], [6], [7], [8], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], тезисы докладов [2], [3], [9]. В совместных работах [1], [9], [11], [12] постановка задачи принадлежит научному руководителю, а получение результатов – автору. В совместных работах [3], [5] постановка задачи и получение теоретических результатов принадлежит автору, а выполнение расчетов на компьютере – соавтору (результаты расчетов соавтора в диссертацию не включены).

Структура, объем и краткое содержание диссертации:

Диссертационная работа состоит из четырех глав, содержащих 32 раздела, выводов, списка использованных источников и приложений, всего 141 страница текста. Нумерация разделов – двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела. Нумерация лемм, теорем, формул, примеров, примечаний – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья – на порядковый номер в разделе.

Краткое содержание работы

В первой главе производится обзор известных определений и результатов других авторов, связанных с темой диссертации, а также используемых в ней.

- Топологические, равномерные, метрические пространства и кинематические пространства – такие, что от каждого элемента этого пространства можно за конечное (и ограниченное снизу) время перейти к любому другому элементу, двигаясь непрерывно по элементам пространства. Минимальное время такого перехода является метрикой.

- Расслоения, римановы поверхности, группы, локальная различимость элементов в топологических пространствах.

- Конструктивная математика и интервальный анализ.

- Определения размерности метрических пространств.

- Компьютерные представления кинематических пространств.

- Топологические свойства пространств, определяемых дифференциальными и алгебраическими уравнениями с аналитическими данными.

Во второй главе развивается теория кинематических и размечаемых пространств.

Введено

О п р е д е л е н и е. Кинематику K (с соответствующей метрикой ρ_K) в множестве G будем называть согласованной с заданной метрикой ρ в этом же множестве, если они задают одинаковую топологию, и полусогласованной, если кинематика задает более сильную топологию.

Т е о р е м а 1. Если в ограниченно-компактном линейно связном метрическом пространстве G с метрикой ρ любые различные точки можно соединить спрямляемой кривой, то в G можно ввести кинематику K, полусогласованную с метрикой ρ.

Т е о р е м а 2. В линейно связном метрическом пространстве G с метрикой ρ можно ввести кинематику K, согласованную с метрикой ρ, тогда и только тогда, когда эта метрика является внутренней.

На примерах показано, что кинематика в этом случае определяется не единственным образом.

Т е о р е м а 3. Для кинематизируемости топологического пространства необходимо, чтобы оно было метризуемо, связно и локально-связно.

О п р е д е л е н и е. Множество, получающееся исключением из связного замкнутого множества конечного количества точек, будем называть конечно-почти-связно-замкнутым. Множество, получающееся исключением из связного замкнутого множества n точек, будем называть n-почти-связно-замкнутым. (Такое множество может быть как связным, так и несвязным).

Доказано, что по заданному почти-связно-замкнутому множеству исключенные точки определяются однозначно.

Т е о р е м а 4. Регулярное сепарабельное топологическое пространство со свойством «более чем одномерности (существует такое всюду плотное множество дуг, что дополнение к нему также всюду плотно)» локально различимо.

Т е о р е м а 5. Локально плоское пространство локально различимо.

Пусть для некоторого метрического пространства G с метрикой ρ заданы вещественнозначная функция $f{:}G \to \mathcal{R}$ и некоторая кривая в G, определенная непрерывной функцией $L{:}[0, 1]\to G$.

О п р е д е л е н и е. Для любых наборов чисел $0=x_0< x_1<\ldots<x_n=1$, и $x_0\le \xi_1\le x_1$, $x_1\le \xi_2\le x_2$, …, $x_{n-1}\le \xi_n\le x_n$ назовем сумму

$$f(L(\xi_1))\rho(L(x_0), L(x_1))+ f(L(\xi_2))\rho (L(x_1), L(x_2))+ \ldots + f(L(\xi_n))\rho (L(x_{n-1}), L(x_n))$$

интегральной суммой. Если существует предел интегральных сумм при $n \to \infty$, $max\{(x_k - x_{k-1}) \mid k=1..n\}\to 0$, то будем называть его определенным интегралом по кривой L от функции f и обозначать $\int_M f(x)\, \rho_K(dx)$. (Под $\rho_K(dx)$ подразумевается - расстояние между бесконечно близкими точками на маршруте M).

Доказана

Т е о р е м а 6. Интеграл существует для любой непрерывной функции f тогда и только тогда, когда кривая L спрямляема.

Такое понятие интеграла возникает в следующей реальной задаче: если при движении по некоторому маршруту в кинематическом пространстве время тратится не только на движение, но и на другие действия, и эти дополнительные затраты зависят от положения движущейся точки на маршруте и задаются вещественнозначной функцией $g(z)$ на единицу времени движения, то общие затраты времени на прохождение маршрута равны $\int_M (g(x)+1)\, \rho_K\, (dx)$.

Далее, введено определение размерности кинематических пространств с учетом их специфики.

Множество кинематического пространства называется :

- полностью ограниченным, или «полностью обозримым», если существует маршрут, содержащий все множество (иными словами, можно обойти все множество за конечное время).
- «почти обозримым», если для любого сколь угодно малого радиуса видимости можно осмотреть все множество за конечное время).

Кинематическое пространство называется

- локально одномерным, если его любая точка имеет полностью обозримую окрестность;
- одномерным, если его любое ограниченное кинематическое подпространство вполне ограничено;
- двумерным, если оно не одномерно и в его любом ограниченном кинематическом подпространстве K' существуют такие маршрут M и множество пересекающих его маршрутов, что их объединение равно K' и их времена равномерно ограничены сверху для данного K'.

Доказана

Т е о р е м а 7. Кинематическая размерность куба (квадрата при $n=2$, гиперкуба при $n>3$) $C_n=[0, 1]^n$ с эвклидовой метрикой и соответствующей кинематикой при $n\geq 2$ равна 2.

Таким образом, для отрезка и квадрата кинематическая размерность равна ранее известным размерностям, а для куба уже не равна.

Далее по индукции определяются и многомерные кинематические пространства.

В третьей главе производится построение и исследование кинематических пространств.

Предполагается, что задано некоторое расслоение S над конструктивно кинематическим пространством Z, и некоторая точка в этом расслоении. Требуется, используя возможности движения в Z, осуществить движение от заданной точки до всех точек расслоения S и изучить таким образом свойства математического объекта, представляемого расслоением S.

Решение задачи состоит из следующих этапов:

- формулировка и доказательство условий для того, чтобы расслоение S было кинематическим пространством и конструктивно кинематическим пространством;
- построение алгоритма движения по расслоению S;
- изучение свойств некоторых конкретных расслоений типа S.

Введено определение. **Суперлистом** над областью комплексной плоскости назовем связное подмножество аналитических точек над этой областью, не являющееся частью более широкого связного подмножества аналитических точек над этой же областью. Максимальное количество аналитических точек над одной и той же точкой в суперлисте назовем **порядком** суперлиста.

Предлагается следующее конструктивное определение римановой поверхности сдвиговой функцией: Сдвиговой прямолинейной функцией над комплексной плоскостью будем называть такую непрерывную для комплексных чисел функцию трех комплексных переменных $w_f(z_1, z_2, w_1)$, принимающую или значение комплексного числа или «нет», что выполняются некоторые свойства. Для их формулировки введем понятие определенной сдвиговой ломаной: это – такая двойная последовательность комплексных чисел $\{z_1, z_2, \ldots, z_n, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, что $w_f(z_k, z_{k+1}, w_k) = w_{k+1}$, $k = 1..n\text{-}1$. Число w_1 будем называть начальным значением, число w_n – конечным значением.

$w_f(z_1, z_1, w_1) \equiv w_1$; $w_f(z_2, z_1, w_f(z_1, z_2, w_1)) \equiv w_2$; если z_2 лежит на отрезке $[z_1, z_3]$, то $w_f(z_2, z_3, w_f(z_1, z_2, w_1)) = w_f(z_1, z_3, w_1)$; если определенную ломаную можно непрерывно преобразовать в определенную ломаную (возможно, с разделением одного отрезка на два или со слиянием двух смежных отрезков в один), то концевые значения должны быть одинаковыми;

$(\exists L > 0)(\ |f(z_1, z_2, w_1) - w_1| \le L|z_1 - z_2|)$.

Вводится "начальное условие"

$$w(z_0) = w_0. \tag{1}$$

Пара значений $\{z_0, w_0\}$ составляет элемент римановой поверхности.

Пусть z_1 – некоторая другая точка или эта же точка на комплексной плоскости, определенная сдвиговая ломаная соединяет эти точки, и ее концевое значение равно w_1. Тогда пара $\{z_1, w_1\}$ также составит элемент римановой поверхности. Кинематическим расстоянием между $\{z_1, w_1\} \in S$ и $\{z_2, w_2\} \in S$ назовем нижнюю грань длин определенных сдвиговых ломаных, соединяющих точки z_1 и z_2 и соответственно связывающих между собой значения w_1 и w_2.

Т е о р е м а 8. Риманова поверхность S таких пар точек $\{z_1, w_1\}$ является кинематическим пространством.

Далее, рассматривается следующее определение римановой поверхности. Пусть дано алгебраическое уравнение

$$f(z, w) = 0 \ (f(z_0, w_0) = 0), \tag{2}$$

где $f(z, w)$ - аналитическая или мероморфная функция своих переменных, с "начальным условием" (2).

Т е о р е м а 9. Если для $f(z,w)$ не существует таких z, что $f(z, w) \equiv 0$, то риманова поверхность S пар точек $\{z_1, w_1\}$ является кинематическим пространством.

Рассматривается также следующее определение.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$w'(z) = f(z, w(z)), \tag{3}$$

где $f(z, w)$ – (по крайней мере локально) определенная и аналитическая функция своих переменных, с начальным условием (1). Пара точек (комплексный вектор) $\{z_0, w_0\}$ находится в области определения функции $f(z, w)$. Пара точек $\{z_0 , w_0\}$ составляет элемент римановой поверхности.

Пусть $z^{\sim}$ – некоторая другая точка или эта же точка на комплексной плоскости, и m – некоторая ломаная, соединяющая эти точки, состоящая из звеньев $m_1, m_2, \ldots, m_k$ и имеющая длину L; z_0 является «начальной» точкой отрезка m_1; при этом функция $f(z, w)$ определена на этой ломаной.

Обозначим через z_j «концевую» точку отрезка m_j , $j=1,\ldots, k$.

О п р е д е л е н и е. Если существуют такие аналитические функции $\varphi_j (t)$, определенные на m_j каждая, что $\varphi_1(z_0)= w_0$; $\varphi_j'(z) \equiv f(z, \varphi_j (z))$ для всех точек $z \in m_j$; для общей точки z_j отрезков m_j и m_{j+1}: $\varphi_j (z_j) = \varphi_{j+1} (z_j)$, $j=1,\ldots, k-1$, то пара $\{ z^{\sim}=z_k, \varphi_k(z_k)\}$ также составит элемент римановой поверхности.

Определим риманову поверхность S для (3)-(1), как множество пар точек $\{z^{\sim}, w^{\sim}\}$, для которых существует хотя бы одна такая ломаная с концевыми значениями $z_k = z^{\sim}$, $\varphi (z_k)=w^{\sim}$.

О п р е д е л е н и е. Кинематическим расстоянием $\rho_K (\{z_1, w_1\}, \{z_2, w_2\})$ между $\{z_1, w_1\}\in S$ и $\{z_2, w_2\} \in S$ назовем точную нижнюю грань длин ломаных m, соединяющих точки z_1 и z_2 и соответственно связывающих между собой значения w_1 и w_2.

Корректность определения следует из:

Т е о р е м а 10. Если функция $f(z,w)$ представима в виде: $f(z,w)= g(z,w)/ h(z,w)$, $g(z,w)$, $h(z,w)$ – аналитические функции, и $h(z, w)$ не равно тождественно нулю, то риманова поверхность S пар точек $\{z_1, w_1\}$ является кинематическим пространством.

Выведены достаточные условия существования особой точки (точки ветвления, полюса или существенно особой точки).

Т е о р е м а 11. Если существуют такие: точка z_{12} и различные гладкие спрямляемые кривые L_1 и L_2, соединяющие точку z_0 с точкой z_{12}, что функция

$f(z,w)$ определена в окрестностях этих кривых и соответствующих окрестностях значений w и при решении уравнения (3) с начальным условием (1) вдоль кривых L_1, L_2 соответственно значения функции $w(z)$ в точке $z=z_{12}$ будут различными, то для любой аналитической в области $G\times\mathbb{C}$ функции $g(z,w)$ существует такое $\varepsilon_0>0$, что при $\varepsilon<\varepsilon_0$ риманова поверхность уравнения

$$w'(z) = f(z, w(z)) + \varepsilon\, g(z,w(z)) \qquad (4)$$

с начальным условием (1) имеет точку ветвления.

Как пример использования этой теоремы, доказана

Т е о р е м а 12. Для любой аналитической в области $G:=\{|z|\le 2,\ |w|\le 2\}$ функции $g(z,w)$ существует такое $\varepsilon_0>0$, что при $\varepsilon<\varepsilon_0$ риманова поверхность уравнения $w'(z) = \dfrac{1}{2w(z)} + \varepsilon g(z,w(z))$ с начальным условием $w(1)=1$ имеет точку ветвления.

Отметим, что точное решение дифференциального уравнения практически невозможно. Вместе с тем, для доказательства существования особой точки достаточно найти решение некоторого дифференциального неравенства.

Т е о р е м а 13. Если $\theta(t)$, $W_0(t):[0,\ T]\to\mathbb{C}$ – гладкие функции, $\theta(0)=\theta(T), W_0(0)\ne W_0(T)$, функция $f(z,\ w)$ определена в окрестности кривой $\{\theta(t),\ W_0(t)\}\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, $t\in[0,\ T]$, выполняется условие

$$|W_0'(t) - h(t, W_0(t))| < \delta,\ 0\le t\le T,\quad h(t, w)= f(\theta(t), w)\theta'(t), \qquad (5)$$

и δ достаточно мало, то в области, ограниченной кривой $\theta(t)$, $t\in[0,\ T]$, существует точка ветвления.

Далее, на примере показано, что для интегрального уравнения второго рода $w(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} f(z,\zeta,w(\zeta))dz$, задание значений z_1 и $w(z_1)$ и некоторой дуги в качестве пути интегрирования от z_1 к z_2 не может определить значение $w(z_2)$, в отличие от дифференциального уравнения вида (3).

В четвертой главе разработаны алгоритмы для построения и исследования римановых поверхностей.

Введены следующие определения.

О п р е д е л е н и е. Линейным интервальным расширением сдвиговой прямолинейной функции $w_f(z_1, z_2, w_1)$ будем называть интервальную комплексную интервально-значную функцию $W_f(z_1, z_2, W_1)$ такую, что

1) Если $w_1\in W_1$ и $w_f(z_1, z, w_1)$ принимает значение «нет» где-либо на отрезке $(z_1\,;\, z_2]$, то $W_f(z_1, z_2, W_1)$= «нет»;

2) Если $W_f(z_1, z_2, W_1)$ определено, то из $z\in(z_1\,;\,z_2]$ и $w_1\in W_1$ следует $w_f(z_1, z, w_1)\in W_f(z_1, z_2, W_1)$;

2) если комплексный интервал W_1 стягивается к w_1 и $z\in(z_1\,;\,z_2]$ приближается к z_1, то $W_f(z_1, z, W_1)$ стягивается к w_1.

О п р е д е л е н и е. Сплошным интервальным расширением сдвиговой прямолинейной функции $w_f(z_1, z_2, w_1)$ будем называть интервальную комплексную интервально-значную функцию $W_f(Z_1, Z_2, W_1)$ такую, что она принимает значения «комплексный интервал» или «нет» и

1) из $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, $w_1 \in W_1$ и $w_f(z_1, z_2, w_1)$ = «нет» следует $W_f(Z_1, Z_2, W_1)$= «нет»;

2) из $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, $w_1 \in W_1$ и определенности $W_f(Z_1, Z_2, W_1)$ следует $w_f(z_1, z_2, w_1) \in W_f(Z_1, Z_2, W_1)$;

3) если комплексные интервалы Z_1, Z_2, W_1 стягиваются к z_1, z_2, w_1, соответственно, то $W(Z_1, Z_2, W_1)$ стягивается к $w_f(z_1, z_2, w_1)$.

Далее, построены следующие алгоритмы:

А л г о р и т м 1 (определение пути до данной точки). По заданной точке сетки, где значение функции w вычислено, этот алгоритм находит (в обратном порядке) последовательность точек сетки, по которому шло вычисление этого значения, вплоть до начальной точки.

Вспомогательный

А л г о р и т м 2 (определение порядка ветвления области). По заданной функциональной цепи, согласованной со сдвиговой функцией, с одинаковыми начальной и конечной точкой, различными промежуточными точками, и существенно различными начальным и конечным значениями и натуральному числу M - ограничению по количеству оборотов выдается сообщение о порядке точки ветвления.

А л г о р и т м 3 (сплошного поиска особых точек). По заданным: начальным значениям (1), алгоритму приближенного вычисления сдвиговой прямолинейной функции, ограничениям по размеру области, времени, памяти и опции «полный поиск / поиск до первой особой точки»: с использованием Алгоритмов 1 и 2 определяется область, содержащая точку ветвления.

А л г о р и т м 4 (управляемого поиска особых точек). По заданным: начальным значениям (1), алгоритму приближенного вычисления сдвиговой прямолинейной функции, ограничению по памяти (длине N массивов), пользователь задает направления движения. Алгоритм дает следующие сообщения: «движение к точке z' невозможно», «та же самая точка», «возврат или тождество», запрос: «применить ли алгоритм поиска порядка ветвления?»

Предложен

А л г о р и т м 5 (различение суперлистов). По заданным двум суперлистам над одной и той же областью комплексной плоскости выбираем точку на границе области и, используя Алгоритм 2, находим все возможные значения первого и второго суперлистов в этой точке. При совпадении двух из этих значений делаем вывод, что суперлисты совпадают, иначе – они различны.

А л г о р и т м 6 (поиск суперлистов над заданной областью комплексной плоскости). Используя Алгоритм 4, двигаемся из начальной точки по различным траекториям к некоторой точке на границе области и при получении различных значений в этой точке находим порядки ветвления области от каждой из них. Выявляем различные суперлисты согласно Алгоритму 5. Для алгебраического уравнения, когда $f(w,z)$ – многочлен, продолжаем поиск, пока сумма порядков различных суперлистов не станет равна порядку многочлена по w или меньше его на единицу (поскольку в последнем случае оставшийся суперлист не имеет ветвления и является листом).

Предлагается неформальный

А л г о р и т м 7 (определение рода римановой поверхности). По заданным: начальным значениям, алгоритму приближенного вычисления сдвиговой прямолинейной функции

А) Определяем суперлисты и их порядки ветвления в окрестности бесконечно удаленной точки.

Б) Методом деления пополам находим такие достаточно мелкие области, что в каждой их них у каждого суперлиста либо нет точки ветвления (то есть он является простым листом), либо находится только одна точка ветвления.

При этом используем следующий факт. Если для римановой поверхности алгебраической функции порядка n над каким-либо циклом находятся области ветвления с суммой порядков, равной $(n–1)$, и цикл, то этот цикл ограничивает простой лист. Если порядок одной из таких области ветвления равен двум, то внутри нее существует точно одна точка ветвления.

В) По формуле Римана-Гурвица $g=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(v_k-1)-n+1$, где m – количество точек ветвления, v_k – порядок k-й точки ветвления, учитывая как бесконечно удаленную точку в А), так и точки в Б), находим род римановой поверхности.

Г) Соединяя границы областей ветвления с некоторой начальной точкой, получаем список образующих фундаментальной группы римановой поверхности (в широком смысле).

Предложены алгоритмы построения линейных и сплошных интервальных расширений сдвиговой прямолинейной функции.

Для алгебраического уравнения (2) предложена и используется следующая формула для сдвиговой функции, основанная на методе касательных (Ньютона):

$w_f(z_1, z_2, w_1) = w_1 – f(z_2,w_1)/ f'_w(z_2,w_1).$

Для дифференциального уравнения (3) предложена и используется следующая формула для сдвиговой функции, основанная на методе ломаных Эйлера:

$w_f(z_1, z_2, w_1) = w_1 + (z_2 – z_1)\, f(z_1, w_1).$

В заключительном разделе этой главы исследуются три контрольных примера и два примера функции с неизвестной римановой поверхностью:

П р и м е р 1. Задача (1)-(2) $f(z,w)=w^2-z$, $w(1)=1$;
$w_f(z_1, z_2, w_1)= w_1-(w_1{}^2-z_2)/(2w_1)= w_1+ (z_2-w_1{}^2)/(2w_1)$.
Условие для значения «нет»: $|x_2|+|y_2|<0.6$.

Были проведены расчеты с $h=1/3$ как со сплошным, так и с направленным поиском. Они дали точку ветвления второго порядка в квадрате $|x|,|y|\le 1$.

П р и м е р 2. Задача (1)-(2) $f(z,w)=w^3-z$, $w(1)=1$;
$w_f(z_1, z_2, w_1)= w_1-(w_1{}^3-z_2)/(3w_1^2)= w_1+ (z_2-w_1{}^3)/(3w_1^2)$.
Условие для значения «нет»: $|x_2|+|y_2|<0.6$.

Были проведены расчеты с $h=1/3$ как со сплошным, так и с направленным поиском. Они дали точку ветвления третьего порядка в квадрате $|x|,|y|\le 1$.

П р и м е р 3. Задача (3)-(2) $f(z,w)=(2w)^{-1}$, $w(4/3)=\sqrt{(4/3)}$.

Условие для значения «нет»: $|x_2|+|y_2|<0.6$.

Были проведены расчеты с $h=1/4$ с направленным поиском. Они дали точку ветвления второго порядка в квадрате $|x|,|y|\le 1$.

Таким образом, расчеты дали результаты, подтверждающие известные свойства соответствующих римановых поверхностей.

П р и м е р 4. Алгебраическое уравнение $w^3-wz-1=0$:
$w_f(z_1, z_2, w_1)= w_1-(w_1{}^3-w_1 z_2-1)/(3w_1^2-z_2)= w_1+ (1+ w_1 z_2-w_1{}^3)/(3w_1^2-z_2)$.
Условие для значения «нет»: $(|3w_1^2-z_2|<0.2)\wedge(|3w_2^2-z_2|<0.2)$.

Было найдено $g=0$.

П р и м е р 5. Алгебраическое уравнение $w^3-3w+2z=0$:
$w_f(z_1, z_2, w_1)= w_1-(w_1{}^3-3w_1+2z_2)/(3w_1^2-3)$.

Условие для значения «нет»: $|w_1-1|<0.2$. Было найдено $g=0$.

Произведено также приближенное вычисление интеграла по траектории, задаваемой пользователем на римановой поверхности.

В Выводах описываются возможные приложения и направления дальнейших исследований для развития общей теории римановых поверхностей и дифференциальных уравнений на таких поверхностях.

Приложения содержат: инструкцию по возможному пополнению и пользованию компьютерной программой; список основных обозначений и программу на языке pascal, реализующую некоторые алгоритмы главы 3, результаты работы программы для вышеперечисленных примеров.

Автор благодарит научного руководителя, члена-корреспондента НАН КР Павла Сергеевича Панкова за постановку задачи исследования, постоянное внимание и поддержку в работе.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Жораев А.Х. Наглядное кинематическое представление римановой поверхности, определяемой алгебраическим уравнением [Текст] / П.С. Панков, А.Х. Жораев // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. Серия 6. Наука и инновационные образовательные технологии в вузе. Труды ИИМОП. – Вып. 5. - Бишкек: КНУ, 2006. - С. 422-426.

2. Жораев А.Х. Оценки "областей определенности" при кинематическом построении римановых поверхностей [Текст] / П.С. Панков, А.Х. Жораев // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: тезисы докладов II международной научной конференции. – Бишкек, 2006. – С. 53.

3. Жораев А.Х. Наглядное кинематическое представление римановой поверхности, определяемой "сдвиговой" функцией [Текст] /А.Х. Жораев, А.А. Ельгин // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: тезисы докладов II международной научной конференции. – Бишкек, 2006. – С. 67.

4. Жораев А.Х. Свойства кинематических пространств и криволинейные интегралы [Текст] /А.Х. Жораев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 34. – Бишкек: Илим, 2006. – С. 174-178.

5. Жораев А.Х. Наглядное кинематическое представление Римановой поверхности, определяемой "сдвиговой" функцией / А.Х. Жораев, А.А. Ельгин // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 34. – Бишкек: Илим, 2006. – С. 179-183.

6. Жораев А.Х. Оценки "областей определенности" при кинематическом построении римановых поверхностей [Текст] / А.Х. Жораев // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына: Естественно-технические науки. Серия 3. Вып. 4. Математика. Информатика. Кибернетика. - Бишкек, 2007. – С. 9-14.

7. Жораев А.Х. Алгоритмы определения типов особых точек римановой поверхности, имеющей кинематическое представление [Текст] / А.Х. Жораев // Известия Ошского Технологического университета, 2008, № 1. – С. 185-189.

8. Жораев А.Х. Доказательное кинематическое представление римановой поверхности, определяемой дифференциальным уравнением [Текст] / А.Х. Жораев // Математический журнал, 2008, том 8, № 4. – Алматы: Институт математики МОиН РК. – С. 52-58.

9. Жораев А.Х. Manned search in kinematical topological spaces [Текст] / P.S. Pankov, A.H. Joraev // Abstracts of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Vol. 1. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – P. 72.

10. Жораев А.Х. Определение размерности кинематических пространств [Текст] / А.Х. Жораев // Наука, образование, техника. Международный научный журнал. Кыргызско-Узбекский университет. - № 2(29), Часть 1, 2009. – С. 137-139.

11. Жораев А.Х. Manned search in kinematical topological spaces [Текст] / P.S. Pankov, A.H. Joraev // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. Almaty, June 30 – July 4, 2009. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – Pp. 102-105.

12. Жораев А.Х. Построение и свойства кинематических пространств [Текст] / П.С. Панков, А.Х. Жораев // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 40. – Бишкек: Илим, 2009. – С. 144-149.

13. Жораев А.Х. Критерии существования особых точек на римановых поверхностях, представляемых дифференциальными уравнениями [Текст] / А.Х. Жораев // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына: Серия 3. Естественно-технические науки. Вып. 4. Математика. Информатика. Кибернетика. - Бишкек, 2010. – С. 93-102.

14. Панков П.С., Жораев А.Х. Методика интерактивного определения структуры римановых поверхностей алгебраических и дифференциальных уравнений // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына: Специальный выпуск, 2011. – С. 32-35.

15. Жораев А.Х. Распознаваемость в локально плоских кинематических пространствах [Текст] / А.Х. Жораев // Вестник МУК, № 1(20), 2011. – С. 55-58.

16. Жораев А.Х. Распознаваемость в топологических пространствах [Текст] / А.Х. Жораев // Вестник МУК, № 1(20), 2011. – С. 61-64.

РЕЗЮМЕ

Жораев Адахамжан Хамитжановичтин «Топологиялык мейкиндиктерди кинематикалык түзүү жана изилдөө» диссертациясы физика-математикалык илимдердин кандидаты даражасын 01.01.04 – геометрия жана топология адистиги боюнча алуу үчүн сунушталган

Урунттуу сөздөр: кинематикалык мейкиндик, Риман бети, аналитикалык функция, алгебралык теңдеме, дифференциалдык теңдеме, бутактоо чекити, беттин түрү, жылдыруу функциясы, башкарылган издөө

Метрикалык мейкиндикти кинематикалаштыруучулугунун зарыл жана жетишерлик шарттары табылды. Берилген функциялары аналитикалык болгон алгебралык жана дифференциалдык теңдемелер аныктаган Риман беттерин кинематикалаштыруу далилденди. Кинематикалык мейкиндиктердин теориясын өнүктүрүүдө ал мейкиндиктин өлчөмдүгүнүн түшүнүгү киргизилди.

Риман беттеринде бутактануу чекиттерин камтыган дифференциалдык теңдемелердин кеңири классы бар экендиги далилденди, дифференциалдык барабарсыздыктар усулунун жардамы менен конкреттүү теңдемелерде бутактануу чекиттеринин жашоосунун далилдөө жолу сунуш кылынган. Мындай Риман беттерин бир түрдүү компьютердик сүрөттөө мүмкүнчүлүгүн берүүчү жылдыруу функциясынын түшүнүгү киргизилген. Өзгөчө чекиттердин типтерин издөөдө жана аныктоодо далил боло алуучу жана далилденбөөчү усулдары иштелип чыккан. Бутактануу чекиттерин баштан туташ жана колдонуучу башкарган издөөнүн алгоритмдери түзүлгөн жана компьютерде ишке ашырылган.

РЕЗЮМЕ

диссертации Жораева Адахамжана Хамитжановича на тему «Кинематическое построение и исследование топологических пространств» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология

Ключевые слова: кинематическое пространство, риманова поверхность, аналитическая функция, алгебраическое уравнение, дифференциальное уравнение, точка ветвления, род поверхности, сдвиговая функция, управляемый поиск

Получены необходимые и достаточные условия кинематизируемости метрических пространств, доказана кинематизируемость римановых поверхностей, определенных алгебраическими и дифференциальными уравнениями с

аналитическими заданными функциями. В рамках развития теории кинематических пространств введено понятие размерности таких пространств.

Доказано существование широких классов дифференциальных уравнений, для которых такие поверхности имеют точки ветвления, с помощью метода дифференциальных неравенств предложен способ доказательства наличия точек ветвления у конкретных уравнений. Введено понятие сдвиговой функции, дающее возможность единообразного компьютерного представления таких римановых поверхностей. Разработаны недоказательные и доказательные методы поиска и определения типов особых точек. Построены и реализованы на компьютере алгоритмы сплошного и управляемого пользователем поиска точек ветвления.

SUMMARY

Joraev Adahamjan Hamitjanovich's dissertation "Kinematical construction and investigation of topological spaces" is submitted for scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences, specialty 01.01.04 – geometry and topology

Key words: kinematical space, Riemann surface, analytical function, algebraic equation, differential equation, branching point, genre of surface, shift function, controlled search

Necessary and sufficient conditions of kinematizivity of metric spaces are obtained; kinematizivity of Riemann surfaces defined by algebraic equations and differential equations with analytical functions is proven. In the frames of developing the theory of kinematical spaces, the definition of dimension of such spaces is introduced.

Existence of wide classes of differential equations defining Riemann surfaces with branching points is proven. A way to prove occurrence of branching points of concrete equations by means of the method of differential inequalities is proposed. The notion of shift function enabling unified computer presentation of such Riemann is introduced. Non-validating and validating ways to find and detect types of singular points are elaborated. Algorithms of solid searching of branching points and one controlled by the user are constructed and implemented at a computer.

Подписано в печать . Формат
Бумага офсетная. Объем 1 п.л.
Печать офсетная. Тираж 100. Заказ .