Ошский государственный университет

Институт природных ресурсов южного отделения Национальной Академии наук Кыргызской Республики

Жалал-Абадский государственный университет

Диссертационный совет К 01.19.599

На правах рукописи
УДК 517.955.8

Орозов Максатбек Омурбекович

Асимптотика решения краевых задач для линейных бисингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Ош – 2021

Работа выполнена на кафедре матанализа Ошского государственного университета

Научный руководитель: Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, доктор физико-математических наук, профессор, декан Кыргызско-Российского факультета Ошского государственного университета.

Официальные оппоненты: Байзаков Асан Байзакович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией «Прикладная математика и информатика» института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики.

Тампагаров Куштарбек Бекмуратович, доктор физико-математических наук, доцент, ректор научно-исследовательского медико-социального института.

Ведущая организация: кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений Ферганского государственного университета, 112000, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19.

Защита состоится 8 октября 2021 года в 16^{30} часов на заседании диссертационного совета К 01.19.599 по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете, Жалал-Абадском государственном университете и Институте природных ресурсов Южного отделения НАН Кыргызской Республики по адресу: 723500, г. Ош ул. Ленина, 331.

Ссылка личного кабинета диссертационного совета онлайн трансляции защиты диссертации: https://vc.vak.kg/b/k_0-37i-ped-2ps.

С диссертацией можно ознакомится в Центральной библиотеке Ошского государственного университета и на сайте диссертационного совета: oshsu.kg.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф-м.н., доцент Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Как нам известно, математические модели стационарных процессов описываются дифференциальными уравнениями в частных производных эллиптического типа. Например, уравнения Лапласа и Пуассона описывают различные стационарные физические поля, стационарный аналог известного уравнения Шредингера в квантовой механике и уравнение Гельмгольца также выражаются уравнениями эллиптического типа.

Предлагаемая диссертация посвящена построению равномерных асимптотических приближений решений краевых задач Дирихле, Неймана и Робена в кольце для линейных неоднородных бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа второго порядка с двумя независимыми переменными.

Задача называется бисингулярной (по терминологии А.М. Ильина), если решение соответствующей невозмущенной задачи сингулярно возмущенной задачи не является гладкой, т.е. не дифференцируемой в некоторой части исследуемой области (например, на границе).

Сингулярно и бисингулярно возмущенные дифференциальные уравнения эллиптического типа исследованы работах: Л.А. Люстерника (1957), М. Вишика (1957), Н. Левинсона (1950), В. Вазова (1944), О.А. Олейник (1952), В.Ф. Бутузова (1973), А. Ильина (1972), Е.Ф. Леликовой (1975), Р. Гадыльшина (1986), А. Данилина (1998), Дж. Коула (1968), Ж.-Л. Лайонса (1968), Н. Темме (2005), А.А. Ершова (2012), Д.А. Турсунова (2013) и др.

Класс бисингулярно возмущенных задач, имеющие точные решения очень узок, почти не существует. Следовательно, построение асимптотических приближений решений подобных задач, т.е. исследование асимптотического поведения решения при стремлении малого параметра к нулю является актуальной.

Задачи, исследованные в диссертации ранее никем не исследованы, и исследуются впервые.

Асимптотические приближения решений краевых задач в кольце построены с помощью классического метода пограничных функций и обобщенного метода пограничных функций. Остаточные члены асимптотических приближений оценивались с использованием метода дифференциальных неравенств и принципа максимума.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами. Работа выполнялась в рамках научных проектов по Институту фундаментальных и прикладных исследований при ОшГУ по темам:

1) «Обобщение различных моделей для задач горения и взрывов и рекомендации», 2017 г.

2) «Задачи фазовых переходов и критические явления. Математические аспекты их уравнений, быстрые переходы и асимптотики», 2019 г.

Цель и задачи исследования. Цель исследования - построить асимптотику решения краевых задач для бисингулярно возмущенных линейных неоднородных уравнений эллиптического типа.

Задачи исследования:

1. Построить асимптотику решения задачи Дирихле, когда потенциал уравнения является не дифференцируемой функцией на границе кольца;

2. Построить асимптотику решения краевых задач Дирихле, Неймана и Робена для бисингулярно возмущенных линейных уравнений эллиптического типа, в случае, когда соответствующая невозмущенная задача имеет регулярную особую окружность.

Научная новизна работы. Впервые в диссертационной работе:

- построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле, когда потенциал уравнения не является дифференцируемой функцией на границе кольца.

- построены равномерные асимптотические разложения решений краевых задач Дирихле, Неймана и Робена, в случае, когда соответствующие невозмущенные задачи имеют регулярную особую окружность.

Практическая значимость полученных результатов. Хотя работа является теоретической, ее результаты могут быть применены в теории возмущений, гидродинамике, аэродинамике, химической кинетике, физике лазеров, биологии и в других отраслях науки. Разработанные алгоритмы построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач могут найти своё применение и для других математических моделей. Результаты исследования также могут быть использованы при чтении лекционных курсов по теории возмущений, и специального курса при подготовке бакалавров и магистров по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Математика и компьютерные науки» кроме того, могут быть использованы при решений других теоретических задач, связанных с качественной теорией дифференциальных уравнений.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- существование и единственность решения задачи Дирихле, когда потенциал уравнения является не дифференцируемой функцией на границе кольца;

- асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных

производных эллиптического типа второго порядка, с потенциалом уравнения $p(\rho)=\sqrt[n]{\rho-1}, n\in N$;

- существование, единственность и ограниченность решений краевых задач Дирихле, Неймана и Робена, в случае, когда предельное уравнение имеет регулярную особую окружность;

- равномерные асимптотические разложения решений краевых задач Дирихле, Неймана и Робена, в случае, когда соответствующая невозмущенная задача имеет регулярную особую окружность.

Личный вклад соискателя. Все научные результаты, представленные в диссертации, принадлежат только автору. В совместных работах с научным руководителем Д.А. Турсунову принадлежит постановка задачи, М.О. Орозову - идеи, разработанные методы, научные результаты. В работе [9] обсуждение результатов принадлежит А.А. Халматову, а научные результаты принадлежат автору. В работе [4] обсуждение результатов принадлежат магистрантам М.И. Маматбуваевой и Ш.А. Раманкуловой, а получение научных результатов, доказательство теорем, получение и формулировка научных результатов принадлежит автору.

Апробация результатов исследования. Результаты работы докладывались и обсуждались на Международных научных конференциях:

- «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежной математики». - Фергана: Ферганский государственный университет, 12-13 марта 2020 г.;

- «Актуальные вопросы образования и науки в контексте регионального развития и цифровизации страны», посвященная 80-летию ОшГУ. - Ош: Ошский государственный университет, 28.05.2020;

- «III Борубаевские чтения», посвященная 35-летию Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики. - Бишкек: Институт математики НАН КР, 2019;

- «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры». Конференция, посвященная 10-летию Евразийского математического журнала. ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 16-19 окт. 2019 г., г. Нур-Султан;

- «Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8». Конференция, посвященная 80-летию со дня рождения А.М. Самойленко (г. Чолпон-Ата, 2018 г.);

- «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». - Ташкент: Национальный университет Узбекистана, 15-17 декабря 2017 г.

А также на межрегиональных семинарах математиков южного Кыргызстана «Актуальные проблемы математики и информатики», руководитель семинара член-корр. НАН КР, профессора К. Алымкулова (г. Ош, 2018-2021 гг.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. По результатам исследований соискателем опубликованы: 7 статей [1]-[7] и 5 тезисы докладов [8]-[12]. В том числе три статьи [1]-[3] опубликованы в журналах, индексируемых в базах Scopus и Web of Science. Статья [4] опубликована в журнале, индексируемый в базе RSCI. Импакт факторы, четырех журналов [1]-[4], в РИНЦе не менее 0,1. На статьи [1]-[4] получены авторские свидетельство Кыргызпатента. Набрал 328 баллов.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из оглавления, списка условных обозначений и определений, принятых в работе, введения, четырех глав, разбитых на 10 параграфов, выводов, списка использованной литературы.

Список использованной литературы содержит 64 наименований. Объем текста 131 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава «ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ» состоит из двух параграфов. В § 1.1 «Обзор литературы» дается обзор литературы по теме диссертации. В данном параграфе проведен анализ научных результатов работ других авторов, наиболее близких к теме предлагаемой диссертационной работы. В «§ 1.2. Обзор результатов диссертации» приведен подробный обзор научных результатов диссертации. Детально изложены постановки задач и теоремы без доказательств. В заключении первой главы отмечено, что на основании проведенных анализов диссертационное исследование актуально, оригинально, своевременно и имеет определенный теоретический и практический интерес.

Вторая глава «МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ» состоит из двух параграфов. В «§ 2.1. Объекты и предметы исследования» приведены объекты и предметы исследования.

Объекты исследования: 1) Задача Дирихле для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка, с потенциалом уравнения $p(\rho)=\sqrt[n]{\rho-1},\ n\in N$;

2) Краевые задачи Дирихле, Неймана и Робена для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка, в случае, когда соответствующие невозмущенные задачи имеют регулярную особую окружность.

Предмет исследования – построение равномерных асимптотических разложений решения краевых бисингулярных задач Дирихле, Неймана и Робена при стремлении малого параметра ε к нулю.

В «§ 2.2. Методы исследования» подробно с конкретными примерами изложены многократно используемые в данной диссертации метод преобразования и асимптотические методы: метод малого параметра, метод пограничных функций, обобщенный метод пограничных функций, принцип максимума, метод дифференциальных неравенств.

Основные научные результаты диссертации приведены в главах 3, 4. В третьей главе «АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В СЛУЧАЕ, КОГДА ПОТЕНЦИАЛОМ УРАВНЕНИЯ ЯЛЯЕТСЯ НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ НА ГРАНИЦЕ КОЛЬЦА» построена асимптотика решения задачи Дирихле в случае, когда потенциалом уравнения является не дифференцируемая функция на внутренней границе кольца. Третья глава состоит из трех параграфов, в первом параграфе излагается постановка задачи:

Исследуем следующую краевую задачу

$$\varepsilon\Delta v(\rho,\varphi,\varepsilon)-\sqrt[n]{\rho-1}\,v(\rho,\varphi,\varepsilon)=F(\rho,\varphi),\qquad (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

$$v(1,\varphi,\varepsilon)=\psi_1(\varphi),\ \ v(a,\varphi,\varepsilon)=\psi_2(\varphi),\ \ \varphi\in[0,2\pi], \tag{2}$$

где $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,1<\rho<a,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$, $n\in N$, $F\in C^{\infty}(\bar{D})$, $\psi_k\in C^{\infty}[0,\ 2\pi]$, k = 1, 2, $\sqrt[n]{\rho-1}$ – потенциал уравнения, n – показатель корня.

Доказаны следующие теоремы и леммы.

Теорема 1. Решение задачи (1), (2) существует и единственно.

Лемма 1. Рассматриваемая задача Дирихле для кольца (1), (2) является бисингулярной, т.е. двумя особенностями.

Сначала подробно исследованы случаи n=2 и n=3, далее сделан вывод на общий случай.

В §3.2 иследован случай n=2. В результате доказаны следующие леммы и теоремы.

Теорема 2. Асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) в случае n=2 можно представить в следующем виде:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{2m+1}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{4m+2}\lambda^k z_k(t,\varphi)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{10m+6}\mu^k w_k(\tau,\varphi)+O(\varepsilon^{2m+1}),\ \varepsilon\to 0,$$

где $t=(a-\rho)/\lambda,\ \lambda=\sqrt{\varepsilon}$, $\tau=(\rho-1)/\mu^2,\ \mu=\sqrt[5]{\varepsilon}$,

$$v_0(\rho,\varphi)=-\frac{f(\rho,\varphi)-f(1,\varphi)}{\sqrt{\rho-1}},\ v_{2k}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{2k-1}(\rho,\varphi)-\Delta v_{2k-1}(1,\varphi)}{\sqrt{\rho-1}},$$

$$v_{2k-1}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{2k-2}(\rho,\varphi)+-\dfrac{\tilde{v}_{2k-2,0}(\varphi)}{4(\rho-1)^{3/2}}+\dfrac{3\tilde{v}_{2k-2,1}(\varphi)\rho-2\tilde{v}_{2k-2,0}(\varphi)}{4\rho\sqrt{\rho-1}}}{\sqrt{\rho-1}},$$

$\tilde{v}_{2k-2,0}(\varphi)=\tilde{v}_{2k-2}(1,\varphi),\ \tilde{v}_{2k-2,1}(\varphi)=\dfrac{\partial\tilde{v}_{2k-2}(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1},\ v_{2k-1}\in C^{\infty}(\bar{D})$,

$v_{2k}\in C(\bar{D}), v_{2k}\in C^{\infty}(D)$,

$w_{10k}(t,\varphi)=O(t^{-1/2}),\ w_{10k+2}(t,\varphi)=O(t^{-2}),\ w_{10k+4}(t,\varphi)=O(t^{-1}),\ t\to\infty,\varphi\in[0,2\pi]$,

остальные $w_n(t,\varphi)$ функций при $t\to\infty$ экспоненциально стремятся к нулю.

$$z_0(t,\varphi)=\left(\psi_2(\varphi)-v_0(a,\varphi)\right)e^{-\sqrt[4]{a-1}t},\ z_k(t,\varphi)=e^{-\sqrt[4]{a-1}t}P_k(t,\varphi),\ P_k\in C^{\infty}(D_1),$$

$D=\{(\rho,\varphi)\,|\,1<\rho<a,0\le\varphi\le 2\pi\},\ D_1=\{(t,\varphi)\,|\,0<t<\dfrac{a-1}{\lambda},0\le\varphi\le 2\pi\}$.

Лемма 2. Решение следующей краевой задачи существует и единственно

$$z''(t)-\sqrt{t}z(t)=ct^{-k/2},\ t\in(0,\infty),\ k=0,1,3,\ z(0)=z^0,\ \lim_{t\to\infty}z(t)=0,$$

где c, z^0 – известные постоянные.

Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$z(t)=\frac{z^0}{z_2(0)}z_2(t)+\frac{c}{c_1}\left(z_2(t)\int_0^t\frac{z_1(s)}{\sqrt{s^k}}ds+z_1(t)\int_t^{\infty}\frac{z_2(s)}{\sqrt{s^k}}ds\right),$$

где $z_1(t)=\sqrt{t}I_{2/5}\left(4t^{5/4}/5\right),\ z_2(t)=\sqrt{t}K_{2/5}\left(4t^{5/4}/5\right)$, $I_{2/5}(s),\ K_{2/5}(s)$ – модифицированные функций Бесселя. Из свойств функций $z_1(t)$ и $z_2(t)$ следует асимптотические оценки:

$$z(t)=O\left(t^{-(k+1)/2}\right),\ t\to\infty,\ \text{и}\ \ z(t)=O\left(t^{2-k/2}\right),\ k=0,1,3,\ t\to 0.$$

В параграфе 3.3 исследован случай n=3. Доказаны следующие теорема и лемма.

Теорема 3. Асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) при n=3 имеет следующий вид:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{3m+2}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{6m+4}\lambda^k z_k(t,\varphi)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{21m+15}\mu^k w_k(\tau,\varphi)+O(\varepsilon^{3m+2}),\ \varepsilon\to 0,$$

где $t=(a-\rho)/\lambda,\ \lambda=\sqrt{\varepsilon},\ \tau=(\rho-1)/\mu^3,\ \mu=\sqrt[7]{\varepsilon},\ v_0(\rho,\varphi)=-\dfrac{f(\rho,\varphi)-f(1,\varphi)}{\sqrt[3]{\rho-1}}$,

$$v_{3k}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{3k-1}(\rho,\varphi)+h_{3k}(\rho,\varphi)}{\sqrt[3]{\rho-1}}=\sqrt[3]{(\rho-1)^2}\,\tilde{v}_{3k}(\rho,\varphi),\ \tilde{v}_{3k}\in C^{\infty}(\bar{D}),$$

$$v_{3k+1}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{3k}(\rho,\varphi)+h_{3k+1}(\rho,\varphi)}{\sqrt[3]{\rho-1}}=\sqrt[3]{\rho-1}\tilde{v}_{3k+1}(\rho,\varphi),\ \tilde{v}_{3k+1}\in C^{\infty}(\bar{D}),$$

$$v_{3k+2}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{3k+1}(\rho,\varphi)+h_{3k+2}(\rho,\varphi)}{\sqrt[3]{\rho-1}}=\tilde{v}_{3k+2}(\rho,\varphi),\ \tilde{v}_{3k+2}\in C^{\infty}(\bar{D}),$$

$$\forall k\in N_0:\ w_k\in C^{\infty}(D_0),\ |w_k(\tau,\varphi)|\le\frac{c}{\sqrt[3]{\tau}},\ \tau\to\infty,\ \varphi\in[0,2\pi],$$

$$z_0(t,\varphi)=\left(\psi_2(\varphi)-v_0(a,\varphi)\right)e^{-\sqrt[6]{a-1}\,t},\ z_k(t,\varphi)=e^{-\sqrt[6]{a-1}\,t}P_k(t,\varphi),\ P_k\in C^{\infty}(D_1).$$

здесь $h_{3k}(\rho,\varphi)=-\Delta v_{3k-1}(1,\varphi)$,

$$h_{3k+1}(\rho,\varphi)=-\frac{2(\tilde{v}_{3k,0}(\varphi)+\tilde{v}_{3k,1}(\varphi)(\rho-1))}{9\sqrt[3]{(\rho-1)^4}}+\frac{4\tilde{v}_{3k,1}(\varphi)}{3\sqrt[3]{\rho-1}}+\frac{2\tilde{v}_{3k,0}(\varphi)}{3\rho\sqrt[3]{\rho-1}},$$

$$h_{3k+2}(\rho,\varphi)=\frac{2(\tilde{v}_{3k+1,0}(\varphi)+\tilde{v}_{3k+1,1}(\varphi)(\rho-1))}{9\sqrt[3]{(\rho-1)^5}}-\frac{2\tilde{v}_{3k+1,1}(\varphi)}{3\sqrt[3]{(\rho-1)^2}}-\frac{\tilde{v}_{3k+1,0}(\varphi)}{3\rho\sqrt[3]{(\rho-1)^2}},$$

$$\tilde{v}_{s,0}(\varphi)=\tilde{v}_s(1,\varphi),\ \tilde{v}_{s,1}(\varphi)=\frac{\partial\tilde{v}_s(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1},$$

$$D=\{(\rho,\varphi)\,|\,1<\rho<a,0\le\varphi\le2\pi\},\ D_1=\{(t,\varphi)\,|\,0<t<\frac{a-1}{\lambda},0\le\varphi\le2\pi\}.$$

Лемма 3. Решение следующей краевой задачи существует и единственно

$$z''(t)-\sqrt[3]{t}z(t)=\frac{c}{\sqrt[3]{t^k}},\ t\in(0,\infty),\ 1\le k\le5,\ z(0)=z^0,\ \lim_{t\to\infty}z(t)=0,\ c,\ z^0-\text{const}.$$

Решение этой задачи имеет следующий вид

$$z(t)=\frac{z^0}{z_2(0)}z_2(t)+\frac{c}{c_1}\left(z_2(t)\int_0^t\frac{z_1(s)}{\sqrt[3]{s^k}}ds+z_1(t)\int_t^{\infty}\frac{z_2(s)}{\sqrt[3]{s^k}}ds\right).$$

где $z_1(t)=\sqrt{t}I_{3/7}\left(\frac{6}{7}t^{\frac{7}{6}}\right),\ z_2(t)=\sqrt{t}K_{3/7}\left(\frac{6}{7}t^{\frac{7}{6}}\right),$ $I_{3/7}(s),\ K_{3/7}(s)$ – модифицированные функций Бесселя. Из всойств функций $z_1(t)$ и $z_2(t)$ получаем следующие асимптотические оценки:

$$z(t)=O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^{k+1}}}\right),\ t\to\infty,\ \text{жана}\ z(t)=z^0+O\left(t^{2-k/3}\right),\ 1\le k\le5,\ t\to0.$$

Теорема 4. Асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) представимо в виде:

$$u(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{s}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{2s}\lambda^k z_k(t,\varphi)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{(2n+1)s+1}\mu^k w_k(\tau,\varphi)+O(\varepsilon^s),\ \varepsilon\to0,$$

где $s=n(m+1)-1,\ t=(a-\rho)/\lambda,\ \lambda=\sqrt{\varepsilon},\ \tau=(\rho-1)/\mu^n,\ \mu=\sqrt[2n+1]{\varepsilon},$

$$v_0(\rho,\varphi)=-\frac{f(\rho,\varphi)-f(1,\varphi)}{\sqrt[n]{\rho-1}},$$

$$v_{nk}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{nk-1}(\rho,\varphi)-\Delta v_{nk-1}(1,\varphi)}{\sqrt[n]{\rho-1}}=\sqrt[n]{(\rho-1)^{n-1}}\,\tilde{v}_{nk}(\rho,\varphi),\ \tilde{v}_{nk}\in C^{\infty}(\bar{D}),k\in N;$$

$$v_{nk+j}(\rho,\varphi)=\frac{\Delta v_{nk+j-1}(\rho,\varphi)+h_{nk+j}(\rho,\varphi)}{\sqrt[n]{\rho-1}}=\sqrt[n]{(\rho-1)^{n-1-j}}\,\tilde{v}_{nk+j}(\rho,\varphi),\ \tilde{v}_{nk+j}\in C^{\infty}(\bar{D}),\ \ j=1,2,...,n-1$$

$$\forall k\in N_0:\ \ w_k\in C^{\infty}(D_0),\,|w_k(\tau,\varphi)|\le\frac{c}{\sqrt[n]{\tau}},\ \tau\to\infty,\ \varphi\in[0,2\pi],$$

$$z_0(t,\varphi)=\left(\psi_2(\varphi)-v_0(a,\varphi)\right)e^{-\sqrt[2n]{a-1}\,t},\ z_k(t,\varphi)=e^{-\sqrt[2n]{a-1}\,t}P_k(t,\varphi),\ P_k\in C^{\infty}(D_1).$$

здесь

$$h_{nk+j}(\rho,\varphi)=\frac{(n-1-j)(1+j)}{n^2}\frac{\tilde{v}_{nk+j-1,0}(\varphi)+(\rho-1)\tilde{v}_{nk+j-1,1}(\varphi)}{\sqrt[n]{(\rho-1)^{n+1+j}}}+$$

$$+\frac{2(n-1-j)}{n}\frac{\tilde{v}_{nk+j-1,1}(\varphi)}{\sqrt[n]{(\rho-1)^{1+j}}}+\frac{n-1-j}{n}\frac{\tilde{v}_{nk+j-1,0}(\varphi)}{\rho\sqrt[n]{(\rho-1)^{1+j}}};\ j=1,2,...,n-1,$$

$$\tilde{v}_{s,0}(\varphi)=\tilde{v}_s(1,\varphi),\ \tilde{v}_{s,1}(\varphi)=\frac{\partial\tilde{v}_s(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1},$$

$$D=\{(\rho,\varphi)\,|\,1<\rho<a,0\le\varphi\le2\pi\},\ D_1=\{(t,\varphi)\,|\,0<t<\frac{a-1}{\lambda},0\le\varphi\le2\pi\}.$$

В главе 4 под названием “ГЛАВА 4. БИСИНГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ИМЕЕТ РЕГУЛЯРНУЮ ОСОБУЮ ОКРУЖНОСТЬ” исследованы бисингулярные краевые задачи Дирихле, Неймана и Робена в случае, когда предельная задача имеет регулярную особую окружность.

В параграфе 4.1 построена асимптотика решения задачи Дирихле, в случае когда соответствующая невозмущенная задача имеет регулярную особую окружность, т.е. исследована следующая задача Дирихле для кольца:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right)+(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial v}{\partial\rho}-q(\varphi)v=F(\rho,\varphi),\quad(\rho,\varphi)\in D,\qquad(3)$$

$$v(a,\varphi,\varepsilon)=\psi_1(\varphi),\ \ v(b,\varphi,\varepsilon)=\psi_2(\varphi),\ \ \varphi\in[0,2\pi],\qquad(4)$$

где $0<a<b$ - известные постоянные, $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,\,0\le\varphi<2\pi\}$,

$q(\varphi)>0\ \varphi\in[0,2\pi],\ v=v(\rho,\varphi,\varepsilon),F\in C^{\infty}(\bar{D}),\ q,\psi_k\in C^{\infty}[0,2\pi],\ k=1,2,$

$\frac{\partial F(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}\ne0,\varphi\in[0,2\pi].$

Доказана следующие теорема и лемма

Теорема 5. Решение задачи (3)-(4) существует, единственно и ограниченно.

Лемма 4. Задача

$$(\rho-a)q(\varphi)z'_{\rho}(\rho,\varphi)-q(\varphi)z(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D,$$
$$z(b,\varphi)=\psi_2(\varphi),\quad \varphi\in[0,2\pi],$$

где $f\in C^{\infty}(\bar{D}),\ q,\ \psi_2\in C^{\infty}[0,2\pi],\ D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,\ 0\le\varphi<2\pi\}$,

имеет единственное решение представимое в виде

$$z(\rho,\varphi)=(\rho-a)q^{-1}(\varphi)\int_b^{\rho}f(s,\varphi)(s-a)^{-2}ds+\psi_2(\varphi)(\rho-a)/(b-a),$$

и это решение можно записать в виде:

$$z(\rho,\varphi)=Q_0(\varphi)(\rho-a)ln(\rho-a)+Q_1(\rho,\varphi),\ \text{где}\ Q_1\in C^{\infty}(\bar{D}),Q_0\in C^{\infty}[0,2\pi].$$

Лемма 5. Задача (3)-(4) является бисингулярной.

Лемма 6. Решение следующей задачи существует и единственно:

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2}+tq(\varphi)\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}-q(\varphi)z(t,\varphi)=G(\mu t,\varphi),(t,\varphi)\in D_1,$$
$$z(0,\varphi)=\gamma(\varphi),\ z\left(\frac{b-a}{\mu},\varphi\right)\to 0,\ \mu\to 0,\varphi\in[0,2\pi],$$

где G – непрерывная фунция, $D_1=\{(t,\varphi)\,|\,0<t<(b-a)/\mu,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$.

Лемма 7. Для решения задач

$$lw_0\equiv\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+tq(\varphi)\frac{\partial w_0}{\partial t}-q(\varphi)w_0=0,(t,\varphi)\in D_1,$$
$$w_0(0,\varphi)=\psi_1(\varphi)-u_0(a,\varphi),\ w_0((b-a)/\mu,\varphi)\to 0,\ \mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi];$$
$$lw_1=-c\frac{\partial w_0}{\partial t}+\frac{1}{t}G_0(\mu t,\varphi),\ (t,\varphi)\in D_1,$$
$$w_1(0,\varphi)=0,\ w_1((b-a)/\mu,\varphi)\to 0,\ \mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi];$$
$$lw_{2n}=-c\frac{\partial w_{2n-1}}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2 w_{2n-2}}{\partial\varphi^2},\ (t,\varphi)\in D_1,$$
$$w_{2n}(0,\varphi)=-u_n(a,\varphi),\ w_{2n}((b-a)/\mu,\varphi)\to 0,\ \mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ n\in N;$$
$$lw_{2n+1}=-c\frac{\partial w_{2n}}{\partial t}-c^2\frac{\partial^2 w_{2n-1}}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{t}G_n(\mu t,\varphi),\ (t,\varphi)\in D_1,$$
$$w_{2n+1}(0,\varphi)=0,\ w_{2n+1}((b-a)/\mu,\varphi)\to 0,\ \mu\to 0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ n\in N.$$

справедливы асимптотические оценки:

$$w_0(t,\varphi)=O\left(e^{-t^2q(\varphi)/2}\right),\ w_{2n-1}(t,\varphi)=O\left(\frac{1}{t}\right),\ \ w_{2n}(t,\varphi)=O\left(\frac{1}{t^2}\right),n\in N,t\to\infty,\varphi\in[0,2\pi].$$

Теорема 6. Для решения задачи Дирихле (3)-(4) справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$v(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi)+\sum_{k=0}^{2n}\varepsilon^{k/2}w_k(t,\varphi)+O(\varepsilon^{n+1}),\ \varepsilon\to 0,(\rho,\varphi)\in\bar{D}.$$

а также имеет место предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}v(\rho,\varphi,\varepsilon)=v_0(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho\le b,\ 0\le\varphi\le 2\pi\},$$

где $w_0(t,\varphi)=O\left(e^{-t^2q(\varphi)/2}\right)$,

$w_{2k+1}(t,\varphi)=O(t^{-1}),\ \ w_{2k}(t,\varphi)=O(t^{-2}),\ t\to\infty,\varphi\in[0,2\pi]$, $u_k\in C(\bar{D}),\ u_k\in C^\infty(D)$.

В § 4.2 построена асимптотика решения задачи Неймана, в случае когда соответствующая невозмущенная задача имеет регулярную особую окружность, т.е. исследована следующая задача Неймана для кольца:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right)+(\rho-a)\frac{\partial v}{\partial\rho}-2v=f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}=\psi_1(\varphi),\quad \frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\psi_2(\varphi),\ \ \varphi\in[0,2\pi], \tag{6}$$

где $0<a<b$ – известные постоянные числа, $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,0\le\varphi\le 2\pi\}$,

$$v=v(\rho,\varphi,\varepsilon),\ f\in C^\infty(\bar{D}),\ \psi_k\in C^\infty[0,2\pi],\ k=1,2,\ \ f_2(\varphi)\equiv\frac{\partial^2 f(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2}\Big|_{\rho=a}\ne 0.$$

В этом параграфе доказаны следующие теоремы и леммы.

Лемма 8. Задач имеет единственное решение

$$(\rho-a)\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-2z(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D,\ \frac{\partial z(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\psi_2(\varphi),\ \varphi\in[0,2\pi],$$

где $f\in C^\infty(\bar{D}),\ \psi_2\in C^\infty[0,2\pi],\ D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,0\le\varphi\le 2\pi\}$,

представимое в виде

$$z(\rho,\varphi)=(\rho-a)^2\int_b^\rho\frac{f(s,\varphi)}{(s-a)^3}ds-\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)^2}f(b,\varphi)+\frac{(\rho-a)^2}{2(b-a)}\psi_2(\varphi)$$

или $\quad z(\rho,\varphi)=f_2(\varphi)(\rho-a)^2\ln(\rho-a)+P(\rho,\varphi)$, где $P\in C^\infty(\bar{D})$.

Лемма 9. Решение задачи существует и единственно:

$$\frac{\partial^2 z(t,\varphi)}{\partial t^2}+t\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}-2z(t,\varphi)=G(\mu t,\varphi)\ln\mu t,(t,\varphi)\in D_1,$$

$$\frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\gamma(\varphi),\quad \frac{\partial z(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=(b-a)\mu^{-1}}=0,\varphi\in[0,2\pi],$$

где G – непрерывная функция, $D_1=\{(t,\varphi)\,|\,0<t<(b-a)/\mu,0\le\varphi\le 2\pi\}$.

Лемма 10. Для решения следующих краевых задач

$$lw_1 = -m\frac{\partial w_0}{\partial t},\ (t,\varphi)\in D_1,$$

$$\frac{\partial w_1(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_1(\varphi) - \frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a},\ \frac{\partial w_1(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=\frac{b-a}{\mu}} = 0,\quad \varphi\in[0,2\pi];$$

$$lw_{2n} = -m\frac{\partial w_{2n-1}}{\partial t} - m^2\frac{\partial^2 w_{2n-2}}{\partial \varphi^2} + G_n(\mu t,\varphi)ln(\mu t),\ (t,\varphi)\in D_1,$$

$$\frac{\partial w_{2n}(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial w_{2n}(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=\frac{b-a}{\mu}} = 0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ n\in N;$$

$$lw_{2n+1} = -m\frac{\partial w_{2n}}{\partial t} - m^2\frac{\partial^2 w_{2n-1}}{\partial \varphi^2},\ (t,\varphi)\in D_1,$$

$$\frac{\partial w_{2n+1}(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\frac{\partial u_{2n}(\rho,\varphi)}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a},\quad \frac{\partial w_{2n+1}(t,\varphi)}{\partial t}\Big|_{t=\frac{b-a}{\mu}} = 0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ n\in N,$$

справедливы асимптотические оценки:

$$w_{2n+1}(t,\varphi) = O\left(t^{-1}\right),\ \ w_{2n}(t,\varphi) = O\left(ln\mu t\right),\ t\to\mu^{-1}(b-a),\ \mu\to 0,\ n\in N,\ \varphi\in[0,2\pi],$$

при $t\to\infty$, $\mu\to 0$ функция $w_1(t,\varphi)$ убывает экспоненциально.

Теорема 7. Для решения задачи (5)-(6) справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$v(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi) + \sum_{k=1}^{2n}\varepsilon^{k/2} w_k(t,\varphi) + O(\varepsilon^{n+1}),\ \varepsilon\to 0,\ (\rho,\varphi)\in\bar{D}.$$

и предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v(\rho,\varphi,\varepsilon) = v_0(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho\le b,\ 0\le\varphi\le 2\pi\},$$

где $u_k\in C^1(\bar{D}),\ u_k\in C^\infty(D),\qquad w_1(t,\varphi) = O\left(t^{-3}e^{-t^2/2}\right),$

$$w_{2n+1}(t,\varphi) = O(t^{-1}),\ w_{2n}(t,\varphi) = O\left(ln\mu t\right),\ t\to(b-a)\mu^{-1},\ \mu\to 0,\ n\in N,\ \ \varphi\in[0,2\pi].$$

В параграфе 4.3 построена асимптотика решения задачи Робена, в случае когда соответствующая невозмущенная задача имеет регулярную особую окружность. В кольце исследована следующая задача Робена:

$$\varepsilon\Delta v + (\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial v}{\partial \rho} - q(\varphi)v = f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{7}$$

$$v(a,\varphi,\varepsilon) - p_1\frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = \psi_1(\varphi),\quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{8}$$

$$v(b,\varphi,\varepsilon)+p_2\frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\psi_2(\varphi),\quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{9}$$

где $0<\varepsilon<<1$, $0<a,\ b, p_1,\ p_2$ – известные постоянные, $b+p_2\neq a$, $q(\varphi)>0\ \varphi\in[0,2\pi]$, $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b, 0\le\varphi\le 2\pi\}$, $v=v(\rho,\varphi,\varepsilon)$, $f\in C^\infty(\bar D)$,

$$q,\psi_k\in C^\infty[0,2\pi],\ k=1,2,\ \ f'_\rho(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=a}\neq 0,\varphi\in[0,2\pi],\ v=v(\rho,\varphi,\varepsilon).$$

Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи Робена (7)-(9), при стремлении малого параметра к нулю.

Доказаны следующие леммы и теоремы.

Лемма 11. Задача имеет единственное решение

$$(\rho-a)q(\varphi)\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-q(\varphi)z(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D,$$

$$z(b,\varphi)+p_2\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=b}=\psi_2(\varphi),\quad \varphi\in[0,2\pi],$$

где $f\in C^\infty(\bar D)$, $\psi_2\in C^\infty[0,2\pi]$, $0<a,\ b, p_1,\ p_2$ – известные постоянные, $b+p_2\neq a$, $q(\varphi)>0\ \varphi\in[0,2\pi]$, $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b, 0\le\varphi\le 2\pi\}$,

представимое в виде

$$z(\rho,\varphi)=\frac{\rho-a}{q(\varphi)}\int_b^\rho\frac{f(s,\varphi)}{(s-a)^2}ds+\frac{\rho-a}{b-a+p_2}\left(\psi_2(\varphi)-\frac{p_2 f(b,\varphi)}{q(\varphi)(b-a)}\right)$$

или $z(\rho,\varphi)=\tilde f_1(\varphi)(\rho-a)ln(\rho-a)+P(\rho,\varphi)$,

здесь $\tilde f_1(\varphi)=\dfrac{1}{q(\varphi)}\dfrac{\partial f_1(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}$, $P\in C^\infty(\bar D)$.

Лемма 12. Пусть $P(t,\varphi)\in C^\infty(\bar D_1)$, $\gamma(\varphi)\in C^\infty[0,2\pi]$. Тогда следующая задача имеет единственное:

$$z''_{tt}(t,\varphi)+tq(\varphi)z'_t(t,\varphi)-q(\varphi)z(t,\varphi)=P(t,\varphi),\ \ (t,\varphi)\in D_1,$$

$$z'_t(t,\varphi)\Big|_{t=0}=\gamma(\varphi),\ \ z'_t(t,\varphi)\Big|_{t=(b-a)/\mu}=0,\ \varphi\in[0,2\pi],$$

представимое в виде:

$$z(t,\varphi)=-z_1(t,\varphi)\int_t^{\frac{b-a}{\mu}}e^{\frac{q(\varphi)s^2}{2}}z_2(s,\varphi)P(s,\varphi)ds-z_2(t,\varphi)\int_0^t e^{\frac{q(\varphi)s^2}{2}}z_1(s,\varphi)P(s,\varphi)ds+$$

$$+\frac{z_2(t,\varphi)}{\alpha}\left(\gamma(\varphi)+\int_0^{\frac{b-a}{\mu}}e^{\frac{q(\varphi)s^2}{2}}z_2(s,\varphi)P(s,\varphi)ds\right),$$

где $\alpha = -\frac{\mu}{b-a} e^{\frac{q(\varphi)(b-a)^2}{\varepsilon}} - q(\varphi) \int\limits_0^{\frac{b-a}{\mu}} e^{-\frac{q(\varphi)s^2}{2}} ds,$

$z_1(t,\varphi) = t$ и $z_2(t,\varphi) = t \int\limits_t^{\frac{b-a}{\mu}} e^{-\frac{q(\varphi)s^2}{2}} s^{-2} ds$ фундаментальная система решений однородного уравнения: $lz = 0$.

Теорема 8. Для решения задачи Робена (7)-(9) справедливо равномерное асимптотическое разложение

$$v(\rho,\varphi,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k u_k(\rho,\varphi) + \sum_{k=0}^{2n} \varepsilon^{k/2} w_k(t,\varphi) + O(\varepsilon^{n+1}), \varepsilon \to 0, (\rho,\varphi) \in \bar{D}.$$

а также предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v(\rho,\varphi,\varepsilon) = v_0(\rho,\varphi), \quad (\rho,\varphi) \in \{(\rho,\varphi) \mid a < \rho \le b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$$

ВЫВОДЫ

В диссертации исследованы:

1) Задача Дирихле для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка, с потенциалом $p(\rho)=\sqrt[n]{\rho-1}, n\in N$;

2) Краевые задачи Дирихле, Неймана и Робена для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка, в случае, когда соответствующие невозмущенные задачи имеют регулярную особую окружность.

Впервые в диссертационной работе:

- построена равномерная асимптотика решения задачи Дирихле, когда потенциал уравнения является не дифференцируемой функцией на границе кольца.
- построены равномерные асимптотики решений краевых задач Дирихле, Неймана и Робена, в случае, когда соответствующие невозмущенные задачи имеют регулярную особую окружность.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность научному руководителю, д.ф.-м.н., профессору Д.А. Турсунову за постоянное внимание и полезные советы при выполнении работы.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Рекомендуем использовать научные результаты диссертации в теории движения, гидродинамике, аэродинамике, физике и других областях науки.

Надеемся, что разработанные алгоритмы построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных дифференциальных уравнений эллиптического типа найдут практические применения.

Результаты исследования также могут быть использованы при чтении лекционных курсов по теории возмущений, преподавании спецкурсов по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Физико-математическое образование», «Математика и компьютерные науки» для аспирантов, PhD докторов, магистров и бакалавров. Кроме того, мы рекомендуем использовать научные результаты при решении теоретических задач в области математики, физики, техники и других наук, связанных с качественной теорией дифференциальных уравнений.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Orozov, M.O.** Asymptotics of the Solution to the Roben Problem for a Ring with Regularly Singular Boundary [Текст] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 1. –P. 89–95. DOI: 10.1134/S1995080220010126.
2. **Orozov, M.O.** Asymptotics of the Solution to the Boundary-Value Problems with Non Smooth Coefficient [Текст] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov, A.A. Halmatov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 6. –P. 1115-1122. DOI: 10.1134/S1995080220060177.
3. **Орозов, М.О.** Асимптотическое решение задачи Дирихле для кольца, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую окружность [Текст] / Д.А.Турсунов, М.О. Орозов // Вестник Томск. гос. университета. Матем. и мех. – 2020. – № 63. – С. 37–46. DOI 10.17223/ 19988621/63/4.
4. **Orozov, M.O.** Asymptotic solution of the perturbed first boundary value problem with a non-smooth coefficient [Текст] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov, // Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics. – 2020. –V. 12. –No. 3. –P. 41–47. DOI: 10.14529/ mmph200306.
5. **Орозов, М.О.** Асимптотическое решение первой краевой задачи с точкой поворота [Текст] / М.О. Орозов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2019. – № 12. – С. 91-95. DOI: 10.26104/NNTIK.2019.45.557
6. **Орозов, М.О.** Асимптотика решения смешанной краевой задачи, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую окружность [Текст] / Д.А. Турсунов, М.О. Орозов // Вестник ОшГУ. – 2020. – № 1.1. – С. 154-160. https://elibrary.ru/item.asp?id=43068376
7. **Орозов, М.О.** Существование и единственность решения бисингулярно возмущенной задачи Дирихле для кольца [Текст] / М.О. Орозов, М.И. Маматбуваева, Ш.А. Раманкулова // Вестник ЖАГУ. – 2020. –Т. 45. – № 2. – С. 33-38. https://elibrary.ru/item.asp?id=44593392
8. **Орозов, М.О.** Асимптотическое решение задачи Дирихле, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет сингулярность [Текст] / М.О. Орозов // Сб. тезисов докладов Межд. науч. конф. «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики». – Фергана, 12-13 март, 2020. – С. 127-129.
9. **Орозов, М.О.** Асимптотика решение бисингулярной задачи Неймана для круга [Текст] / Д.А.Турсунов, М.О. Орозов // Тезисы докладов Республиканской науч. конф. с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». – Ташкент, 15-17 декабря, 2017. – С.111-112.
10. **Орозов, М.О.** Асимптотика решение задачи Дирихле для кольца негладким коэффициентом [Текст] / Д.А. Турсунов, М.О. Орозов // Сб. тезисов Межд. науч. конф. “Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры” (EMG-2019). – Нур-Султан, 2019. – С. 147-148.

11. **Orozov, M.O.** Asymptotic expansions of solutions to Robin problem for elliptic equation with singularities [Текст] / D.A.Tursunov, M.O. Orozov // Abstracts of International conference «Mathematical analysis, Differential Equation and Applications» MADEA-8. – Cholpon-Ata, 2018. – P. 128-129.
12. **Orozov, M.O.** Asymptotics of the solution of the Dirichlet problem for a disk [Текст] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov // Abstracts Int. scientific. conf. "III Borubaev Readings" dedicated to the 35th anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic. – Bishkek, 2019. – P. 33.

Орозов Максатбек Омурбековичтин «Бисингулярдык козголгон эллиптикалык типтеги сызыктуу теңдемелер үчүн чектик маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасы» деген темадагы 01.01.02 - дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математикалык илимдердин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Негизги сөздөр: кичи параметр, асимптотикалык катар, сингулярдык козголгон маселе, бисингулярдык маселе, регулярдык өзгөчө айлана, Дирихленин маселеси, Робендин маселеси, Неймандын маселеси.

Изилдөө объектиси: 1) Бисингулярдык козголгон сызыктуу бир тектүү эмес экинчи тартиптеги эки өзгөрүлмөлүү эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн алкакта Дирихленин маселеси.

2) Тиешелүү козголбогон маселе регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон бисингулярдык козголгон сызыктуу бир тектүү эмес экинчи тартиптеги эки өзгөрүлмөлүү эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн алкакта Дирихленин, Неймандын жана Робендин маселелери.

Изилдөө предмети. Дирихленин, Неймандын жана Робендин чектик маселелеринин чыгарылыштарынын, ε кичи параметри нөлгө умтулгандагы, бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларын тургузуу.

Иштин максаты. Бисингулярдык козголгон эллиптикалык типтеги сызыктуу теңдемелер үчүн чектик маселелердин чыгарылыштарынын асимптотикасын тургузуу.

Изилдөөнүн методдору жана аппараты: кичине параметр методу, чек аралык функциялар методу, жалпыланган чек аралык функциялар методу, максимум принциби, дифференциалдык барабарсыздыктар методу.

Алынган натыйжалар жана алардын жаңылыгы. Теңдеменин потенциалы алкактын чек-арасында дифференцирленбөөчү функция болгон учурда Дирихленин маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы тургузулду. Пределдик маселеси регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон Дирихленин, Неймандын жана Робендин маселелеринин чыгарылыштарынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмалары тургузулду

Колдонуу даражасы же колдонуу боюнча сунуштар. Жумуш теориялык мазмунда болгону менен, анын натыйжалары козголуулар теориясында, гидродинамикада, аэродинамикада жана илимдин башка тармактарында колдонулушу мүмкүн.

Колдонуу жааты. Ушул сыяктуу маселелер гидродинамикада, физикада, аэродинамикада, океанологияда, астрономияда ж.б. илимдин аймактарында жана техникада кездешет.

РЕЗЮМЕ

Диссертации Орозова Максатбека Омурбековича на тему: «Асимптотика решения бисингулярно возмущенных краевых задач для линейных уравнений эллиптического типа» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: малый параметр, асимптотический ряд, сингулярно возмущенная задача, бисингулярная задача, регулярная особая окружность, задача Дирихле, задача Робена, задача Неймана.

Объект исследования: 1) Задача Дирихле в кольце для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка с двумя переменными. 2) Задачи Дирихле, Неймана и Робена в кольце для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа второго порядка с двумя переменными, когда соответствующая невозмущенная задача имеет регулярную особую окружность.

Предмет исследования. Построение равномерных асимптотических разложений решений краевых задач Дирихле, Неймана и Робена при стремлении малого параметра ε к нулю.

Цель работы. Построение асимптотики решения краевых задач для бисингулярно возмущенных линейных уравнений эллиптического типа.

Методы исследования и аппаратура: метод малого параметра, метод пограничных функций, обобщенный метод пограничных функций, принцип максимума, метод дифференциальных неравенств.

Полученные результаты и их новизна. Построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле, в случае, когда потенциал уравнения не дифференцируема на границе кольца.

Построены равномерные асимптотические разложения краевых задач Дирихле, Неймана и Робена, в случае, когда предельная задача имеет регулярную особую окружность.

Степень использования или рекомендации по использованию. Хотя работа является теоретической, ее результаты могут быть применены в теории возмущений, гидродинамике, аэродинамике и в других отраслях науки.

Область применения. Подобные задачи встречаются в гидродинамике, физике, аэродинамике, океанологии, астрономии и др. областях науки и техники.

SUMMARY

Orozov Maksatbek Omurbekovich Dissertation «Asymptotics of the solution of bisingularly perturbed boundary value problems for linear equations of elliptic type» for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences (specialty 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control**)**

Key words: small parameter, asymptotic series, singularly perturbed problem, bisingular problem, regularly singular circle, Dirichlet problem, Robin problem, Neumann problem.

Object of research. 1) The Dirichlet problem in a ring for a bisingularly perturbed linear inhomogeneous partial differential equation of second order elliptic type in two variables. 2) Problems of Dirichlet, Neumann and Robin in a ring for a bisingularly perturbed linear inhomogeneous partial differential equation of second order elliptic type in two variables, when the corresponding unperturbed problem has a regularly singular circle.

Subject of study. Construction of uniform asymptotic expansions of solutions of the Dirichlet, Neumann and Robin boundary value problems as the small parameter ε tends to zero.

Purpose of work. Construction of the asymptotics of the solution of boundary value problems for bisingularly perturbed linear equations of elliptic type.

Research methods and equipment: small parameter method, boundary function method, generalized boundary function method, maximum principle, differential inequality method.

The results obtained and their novelty. A uniform asymptotic expansion of the solution to the Dirichlet problem is constructed in the case when the potential of the equation is not differentiable on the boundary of the ring.

Uniform asymptotic expansions of the Dirichlet, Neumann and Robin boundary value problems are constructed in the case when the limit problem has a regularly singular circle.

Degree of use or recommendations for use. Although the work is theoretical, its results can be applied in perturbation theory, hydrodynamics, aerodynamics and other branches of science.

Application area. Similar problems are encountered in hydrodynamics, physics, aerodynamics, oceanology, astronomy, and other fields of science and technology.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ, ЕДИНИЦ, ТЕРМИНОВ, СОКРАЩЕНИЙ

- **N**, **Z**, **R** – множество натуральных, целых и действительных чисел, соответственно
- $\mathbf{N_0}=\mathbf{N}\cup\{0\}$.
- $\forall$ – квантор обобщения.
- $\exists$ – квантор существования.
- $\in$ – «принадлежит».
- ~ – «эквивалентный».
- $\Rightarrow$ – «следует».
- $C^{\infty}(D)$ – – множество бесконечно дифференцируемых функций в области D.
- $0<\varepsilon<<1$ – малый параметр,
- $0<\lambda$, μ – такие же параметры, связанные с ε.
- $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат.

O, o – символы сравнения или Ландау.

Подписано в печать: ___ 2021
Обьем: 1,5 п.л. Заказ № __
Формат 60х90 1/16. Тираж 120 экз.

Редакционно-издательский отдел “Билим” ОшГУ
г. Ош, ул. Ленина, 331.