ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ
ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ К.01.19.599

На правах рукописи
УДК 517.968

Камбарова Айсалкын Даминовна

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА НА ОСИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош - 2021

Работа выполнена на кафедре математического анализа Ошского государственного университета

Научный руководитель: **Асанов Авыт,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор отделения математики Кыргызско-Турецкого университета “Манас”

Официальные оппоненты: **Аширбаева Айжаркын Жоробековна,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой прикладной математики ОшТУ

Тампагаров Куштарбек Бекмуратович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры естественно-гуманитарных дисциплин Научно-исследовательского медико-социального института

Ведущая организация: Кафедра дифференциальных уравнений Кыргызского национального университета имени Жусупа Баласагына, 720033 Кыргызстан, г. Бишкек, ул. Абдымомунова 238.

Защита диссертации состоится «12» января 2022 г. в 13:00 часов на заседании диссертационного совета К 01.19.599 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете, Институте природных ресурсов Южного отделения НАН Кыргызской Республики и Жалал-Абадском государственном университете по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331, 203 каб.

Идентификационный код онлайн трансляции защиты диссертации: http://vc.vak/b/k01-wvo-bll-2lm.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ошского государственного университета по адресу: 723500 г. Ош, ул. Ленина, 331 и на сайте: www.oshsu.kg.

Автореферат разослан «11 » декабря 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. В последние годы развивается теория интегральных уравнений первого рода как область теории некорректных задач. Среди математических задач выделяется класс задач, решение которых неустойчиво к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректно поставленных задач. Одним из классов таких некорректных задач являются интегральные уравнения первого родов.

Многие обратные задачи относятся к числу так называемых некорректно поставленных данных. Например, малым изменениям входных данных могут соответствовать большие изменения в решениях. Современная теория решения некорректно поставленных задач, основанная на работах российских математиков – А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова и их научных школ, позволяют преодолеть возникающие трудности. В развитие теории и приложений некорректных задач весомый вклад внесли ученые М.М. Лаврентьев, А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, В.К Иванов, В.В. Васин, М.И. Иманалиев, В.П. Танана, В.Г. Романов, А.Г. Ягола, Ю.Е. Аниконов, С.П, Шишатский, В.А. Морозов, А.Л. Бухгейм, А.М.Д енисов, Н.С. Габбасов, С.И. Кабанихин, А.С. Апарцин, А. Асанов, А. Саадабаев, Т.Д. Омуров, Т.Т. Каракеев, Б.С. Аблабеков, А.Дж.Сатыбаев, А. Сраждинив, З.А. Каденова, Т.О. Бекешов, Г.С. Ободоева, А. Тойгонбаева и др.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими программами и проектами. Работа выполнена в рамках проектов НИР Института математики НАН КР: «Развитие и приложения компьютерного моделирования, асимптотических, и аналитических методов в теории устойчивости динамических систем, разрешимости обратных задач, экономических и геофизических процессов» (2016-2018 гг.), номер государственной регистрации № 0007125 и включены в отчеты по этим проектам.

Цель исследования состоит в построении регуляризирующего оператора и доказательстве единственности решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода и их систем на оси.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие **задачи**:

-получение достаточных условий единственности решений для интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси;

-построение регуляризирующих операторов интегральных уравнений Вольтерра первого рода и их систем на оси;

-доказательство теорем единственности решений для систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси.

Методы исследования. Основными методами исследования являются: методы функционального анализа, метод регуляризации М.М. Лаврентьева, методы интегральных преобразований.

Научная новизна работы:

Для интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси;

-построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и доказаны теоремы единственности решений линейных интегральных уравнений;

-построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и доказаны теоремы единственности решений нелинейных интегральных уравнений;

-Выбран параметр регуляризации для решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси;

-построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и доказаны теоремы единственности решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси;

-Разработан алгоритм выбора параметра регуляризации для решений систем двух линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты исследований вопросов регуляризации и единственности решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси могут быть применены в различных областях науки и техники.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

Для интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси;

-построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и установлены достаточные условия единственности решения для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси;

-построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и установлены достаточные условия единственности решения для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси;

-построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и установлены достаточные условия единственности решения для систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси;

Личный вклад соискателя состоит в построении регуляризирующих операторов для решения интегральных уравнений

Вольтерра первого рода и их систем, доказательстве теоремы их единственности. В работе [5] соавторы Тойгонбаева А.К., Ододоева Г.С., Оморов А.О. и в работе [8] Тойгонбаева А.К., Беделова Н.С., Мурзабаева А.Б. приняли в участие в обсуждении и оформлении полученных результатов.

Апробация результатов исследования. Материалы диссертации докладывались на международных и республиканских научно-практических конференциях:

- на конференции «Интеграция науки в современном мире», г. Москва, 29-30 июня 2021 г.;

-«Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications - MADEA 8» конференция, посвященная 80-летию со дня рождения А.М. Самойленко, г. Чолпон-Ата, 2018 г.;.

-на межрегиональных семинарах математиков южного Кыргызстана «Актуальные проблемы математики и их приложения», под руководством члена-корреспондента НАН КР, д.ф.-м.н., профессора К. Алымкулова г. Ош, 2018-2021 гг.

Публикации. Основное содержание диссертационной работы опубликовано в 11 научных статьях соискателя. Из них 8 в рецензируемых зарубежных периодических изданиях и сборниках индексируемых РИНЦ, в пяти журналах с не нулевым импакт-фактором. Общее количество накопленных баллов – 198.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка использованных литератур. Работа изложена на 91 страницах машинописного текста. Перечень литературы содержит 91 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе [**Обзор литератур по теме диссертации**] сделан обзор основных результатов научных исследований в теории некорректных задач и задач, приводящие к некорректным задачам.

В главе 2 [**Интегральные уравнения Вольтерра первого рода на оси**], произведены доказательства теорем единственности решений и построены регуляризующие операторы по М.М. Лаврентьеву для интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси в пространствах $C_0{}^1(R)$ и $C_0^{\gamma}(R)$ и выбран параметр регуляризации.

Третья глава посвящена для доказательства теорему единственности решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси и для построения регуляризирующих операторов по М.М. Лаврентьеву, а также на выбор параметра регуляризации.

В § 2.1 для решений уравнения (1) доказана теорема единственности решений и построена регуляризирующий оператор в пространстве $C_0^1(R)$.

Рассмотрено следующее линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_{-\infty}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t), \qquad t\in(-\infty,+\infty), \tag{1}$$

где $K(t,s)$ и $f(t)$ – заданные функции, $u(t)$ – неизвестная функция.

И одновременно рассматривается интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{t} K(t,s)v(s,\varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u_0, \tag{2}$$

где $\varepsilon \succ 0$ - малый параметр, $u_0 = \lim\limits_{t\to-\infty} u(t)$, $u(t)$ – решение уравнения (1).

Предположим выполнение следующих условий:

a) $K(t,t)\geq 0$ при всех $t\in R$

$$\int_{-\infty}^{t} |K(t,s)|ds\epsilon C(-\infty,+\infty), K(t,t)\epsilon L_{1,loc}(-\infty;+\infty).$$

b) Для любых $t_1, t_2\epsilon(-\infty;+\infty)$,

$$|K(t_1,s) - K(t_2,s)| \leq l(s)\left|\int_{t_1}^{t_2} K(s,s)ds\right|,$$

где $0\leq l(t)$ при всех t ϵ $(-\infty,+\infty), l(t)\epsilon L_1(-\infty;+\infty)$.

Доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть выполняются условия а), б) и $u(t)\in C_0^1(R)$, где $u(t) -$ решение уравнения (1). Тогда решение $v(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon \to 0$ стремится к решению $u(t)$ уравнения (1), где $u_0 = \lim\limits_{t\to-\infty} u(t)$ при этом справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon) - u(t)\|_C \leq M_1\varepsilon,$$

где $M_1 = M_0 exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} l(s)ds\right)$, $|u'(t)| \leq M_0K(t,t)$, $t\in R$.

Здесь $u(t)\in C_0^1(R)$ тогда и только тогда когда

$$\lim_{t\to-\infty} u(t) = u_0 \in R, \ |u'(t)| \leq M_0K(t,t), \ \forall t\in R.$$

Следствие 1. Пусть выполняются условия а), б) и существует $\delta\in R$ такое, что $K(t,t)>0$ почти при всех $t\epsilon(-\infty,\delta)$.Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $C_0^1(R)$.

Пример. Рассмотрим уравнения (1) и (2) при

$$K(t,s)=\frac{|s|}{\left(1+s^2\right)^2}\left[\frac{1}{1+s^2}+\int_s^t\frac{|\tau|}{\left(1+\tau^2\right)^3}d\tau\right],\ (t,s)\in G$$

В этом случае условия теоремы выполняются при

$$K(s,s)=\frac{|s|}{\left(1+s^2\right)^3},\ l(s)=\frac{|s|}{\left(1+s^2\right)^2},\ s\in R$$

$\forall \quad t_1,t_2\in R$ имеем

$$K(t_1,s)-K(t_2,s)=\frac{|s|}{\left(1+s^2\right)^2}\int_{t_2}^{t_1}\frac{|\tau|}{(1+\tau^2)^3}d\tau$$

Отсюда получим

$$\left|K(t_1,s)-K(t_2,s)\right|\le l(s)\left|\int_{t_1}^{t_2}K(\tau,\tau)d\tau\right|.$$

В §2.2 доказана теорема единственности решений уравнения (1) и построен регуляризирующий оператор в пространстве $C_\varphi^\gamma(R), 0\prec\gamma\le 1.$ Одновременно рассмотрены уравнение (1) и (2).

Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполняются условия а), б) и $u(t)\in C_\varphi^\gamma(R)$, $0\prec\gamma\le 1$. Тогда решение $v(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon\to 0$ стремится к решению $u(t)$ уравнения (1), при этом справедлива оценка

$$\left\|v(t,\varepsilon)-u(t)\right\|_C\le M_2\varepsilon^\gamma$$

где

$$M_2=M_0M_1\exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}l(s)ds\right),$$ для любых $t_1,\ t_2\in R$

$$\left|u(t_1)-u(t_2)\right|\le M_0\left|\int_{t_1}^{t_2}K(s,s)ds\right|^\gamma,\ M_1=\sup_{v\ge 0}(e^{-v}v^\gamma)+\int_0^\infty e^{-v}v^\gamma dv,$$

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}K(s,s)ds,\ t\in R.$$

Следствие 2. Пусть выполняются условия теоремы 2 и существует $\delta\in R$ удовлетворяющих условию $K(t,t)\succ 0$, почти при всех $t\epsilon(-\infty,\delta)$.Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $u(t)\in C_\varphi^\gamma(R),\ 0<\gamma\le 1$.

В §2.3 разработан алгоритм выбора параметра регуляризации для интегрального уравнения (3).

Пусть выполняются

$$\left\| f(t) - f_\delta(t) \right\|_c \le \delta, \ \left| u_0 - u_{o\delta} \right| \le c_1 \sqrt{\delta}$$

где δ и c_1 – положительные постоянные.

Рассмотрим следующее уравнение

$$\varepsilon v_\delta(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{t} K(t,s) v_\delta(s,\varepsilon) ds = f_\delta(t) + \varepsilon u_{0\delta}, \ t \in R. \tag{3}$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда решение $v_\delta(t,\varepsilon)$ уравнения (3) при $\varepsilon = \delta^{\frac{1}{\gamma+1}}$ сходится по норме $C(R)$ к решению $u(t)$ уравнения (1) и при этом справедлива оценка

$$\left\| u(\mathrm{t}) - v_\delta(\mathrm{t}, \sqrt{\delta}) \right\|_C \le \left(M_2 + 3M_3 \right) \delta^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} + C_1 M_3 \sqrt{\delta}$$

где

$$M_3 = \exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} l(\mathrm{s}) \, \mathrm{ds} \right\}.$$

В §2.4 доказана теорема единственности решений нелинейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода и построен регуляризирующий оператор в пространстве $C_\varphi^\gamma(R), 0 < \gamma \le 1$.

Исследовано нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_{-\infty}^{t} K\left(t,s,u(s)\right) ds = f(t), \ t \in R. \tag{4}$$

где $K(t,s,u)$ и $f(t)$ – заданные функции, $u(t)$ – неизвестная функция и одновременно рассмотрено нелинейное интегральное уравнение второго рода

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{t} K\left(t,s,v(s,\varepsilon)\right) ds = f(t) + \varepsilon u_0, \ u_0 = \lim_{t \to -\infty} u(t) \in R \tag{5}$$

где

$$K(t,s,u) = K(t,s)u + K_1(t,s,u), (t,s,u) \in G \times R. \tag{6}$$

Предположим выполнение следующее условие:

c) при $t_2 \ge t_1$ для любых (t_1,s), $(t_2,s) \in G$ и (t_1,s,u_1), (t_1,s,u_2), (t_2,s,u_1), $(t_2,s,u_2) \in G \times R$ справедлива следующее неравенство

$$\left| K_1(t_1,s,u_1) - K_1(t_1,s,u_2) - K_1(t_2,s,u_1) + K_1(t_2,s,u_2) \right| \le l_1(s) \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s,s) ds \right| \left| u_1 - u_2 \right|$$

и $K_1(t,t,u)=0$ для всех $(t,u) \in R^2$, $K_1(t,s,0)=0$ при всех $(t,s) \in G$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия а), б) с) и $u(t) \in C_\varphi^\gamma(R)$, где $u(t)$ – решение уравнения (4). Тогда решение $v(t,\varepsilon)$ уравнения (5) при $\varepsilon \to 0$ стремится к решению $u(t)$ уравнения (4) и при этом справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|_C \le M_2\varepsilon^\gamma$$

где $\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} K(s,s)ds, t\in R,$

$$M_2 = M_0 M_1 exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(l(s)+l_1(s)\right)ds\right), \forall t_1,t_2\in R,$$

$$|u(t_1)-u(t_2)| \le M_0\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} K(s,s)ds\right|^\gamma,$$

$$M_1 = \sup_{v\ge 0}(e^{-v}v^\gamma)+\int\limits_0^\infty e^{-v}v^\gamma dv \;.$$

Следствие 3. Пусть выполняются условия а), б), с) и существует $\alpha\in R$ такое, что $K(t,t)>0$ почти при всех $t\in(-\infty,\alpha)$. Тогда решение уравнения (4) единственно в пространстве $C_\varphi^\gamma(R), 0<\gamma\le 1$.

Пример. Рассмотрим уравнения (4) и (5) при условии

$$K(t,s,u)=\frac{1}{1+4s^2}\left[\frac{|s|}{1+4s^2}+\int\limits_s^t\frac{|\tau|}{(1+4\tau^2)^2}d\tau\right]u-\frac{6}{1+9s^2}\left[\int\limits_s^t\frac{|\tau|}{(1+4\tau^2)^2}d\tau\right]\frac{u}{1+u^2},(t,s,u)\in G\times R$$

В этом случае условия теоремы выполняются при

$$K(t,s)=\frac{1}{1+4s^2}\left[\frac{|s|}{1+4s^2}+\int\limits_s^t\frac{|\tau|}{(1+4\tau^2)^2}d\tau\right],(t,s)\in G$$

$$K_1(t,s,u)=-\frac{6}{1+9s^2}\left[\int\limits_s^t\frac{|\tau|}{(1+4\tau^2)^2}d\tau\right]\frac{u}{1+u^2},(t,s,u)\in G\times R$$

$$K(t,t)=\frac{|t|}{\left(1+4t^2\right)^2},\; l(t)=\frac{1}{1+4t^2},\; l_1(t)=\frac{12}{1+9t^2},\; t\in R.$$

На самом деле, для любых t_1, $t_2\in R$

$$K(t_1,s)-K(t_2,s)=\frac{1}{1+4s^2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{|\tau|}{\left(1+4\tau^2\right)^2}d\tau.$$

отсюда

$$\left|K(t_1,s)-K(t_2,s)\right|\le l(s)\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}K(\tau,\tau)d\tau\right|.$$

В §2.5 выбран параметр регуляризации нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси одновременно рассмотрены уравнение (4) и следующие интегральные уравнения

$$\varepsilon v_\delta(t,\varepsilon)+\int\limits_{-\infty}^{t}K\left(t,s,v_\delta(s,\varepsilon)\right)ds = f_\delta(t)+\varepsilon u_{0\delta}, \tag{7}$$

где $K(t,s,u)$ определяется по формуле (6)

$$\|f(t)-f_\delta(t)\|_c \le \delta,\ |u_0-u_{o\delta}|\le c_1\sqrt{\delta}.$$

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 5. Пусть выполняются условия а), б), с) и $u(t)\in C_\varphi^\gamma(R)$.Тогда решение $v(t,\varepsilon)$ уравнения (5), при $\varepsilon\to 0$ стремится к решению $u(t)$ уравнения (4) и справедлива следующая оценка

$$\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|_C \le M_2\varepsilon^\gamma,$$

где
$$M_2=M_0M_1 exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}(l(s)+l_1(s))ds\right),\ \forall t_1,t_2\in R$$

$$|u(t_1)-u(t_2)|\le M_0\left|\int_{t_1}^{t_2}K(s,s)ds\right|^\gamma, \qquad M_1=\sup_{v\ge 0}(e^{-v}v^\gamma)+\int_0^\infty e^{-v}v^\gamma dv.$$

Теорема 6. Пусть выполняются условия а), б), с) и $u(t)\in C_\varphi^\gamma(R)$ Тогда решение $v_\delta(t,\varepsilon)$ уравнения (7) при $\varepsilon=\delta^{\frac{1}{\gamma+1}}$ сходится по норме $C(R)$ к решению $u(t)$ уравнения (4) и при этом справедлива оценка

$$\left\|u(t)-v_\delta(t,\sqrt{\delta})\right\|_C \le (M_2+3M_3)\delta^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}+C_1M_3\sqrt{\delta}$$

где

$$M_2=M_0M_1 exp\{\int_{-\infty}^{\infty}[l(s)+l_1(s)]ds\},\ M_3=exp\{\int_{-\infty}^{\infty}[l(s)+l_1(s)]ds\},$$

$$M_1=\sup_{v\ge 0}(e^{-v}v^\gamma)+\int_0^\infty e^{-v}v^\gamma dv,\ M_0=\sup_{t,\tau\in R}\frac{|u(t)-u(\tau)|}{\left|\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau\right|^\gamma},\ 0<\gamma\le 1.$$

В третьей главе исследована системы линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси.

В § 3.1 рассмотрено регуляризация решений систем одного класса двух линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси. одновременно рассматриваются следующие системы двух линейных интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{t}K(t,s)u(s)ds=f(t),t\in R=(-\infty,\infty), \tag{8}$$

$$\varepsilon v(t,\varepsilon)+\int_{-\infty}^{t}K(t,s)v(s,\varepsilon)ds=f(t)+\varepsilon u_0,t\in R=(-\infty,\infty), \tag{9}$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр, $K(t,s)$ – известная 2×2 – мерная матричная функция определенная на $G=\{(t,s);-\infty<s\le t<\infty\}$, $f(t)$ – известная двух мерная вектор-функция, $u\,(t)$ и $v(t,\varepsilon)$ – искомые двух мерные вектор-функции, $u_0 = \lim\limits_{t\to-\infty} u(t),\ u_0 \in R^2$.

Предположим выполнение следующих условий:

а) $K(t,s)=\{K_{ij}(t,s)\}$, $i,j=1,2$; $K_{ij}(t,s)\in C(G)$, для фиксированного $t\in R, \|K(t,s)\|, \|K(s,s)\| \in L_1(-\infty,t)$ и $K_{ij}(t,t)\in C(R)$, где $G=\{(t,s): -\infty<s\leq t<\infty\}$;

b) $K_{11}(t,t)+K_{22}(t,t)\geq 0$ и

$$K_{11}(t,t)K_{22}(t,t) \geq \frac{1}{4}\left(K_{12}(t,t)+K_{21}(t,t)\right)^2,\ \forall t\in R$$

c) при $t>\tau$ для любых $(t,s),(\tau,s)\in G$ справедлива оценка

$$\|K(t,s)-K(\tau,s)\| \leq l(s)\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds,\ \ l(t)\in C(R)\cap L_1(R).$$

Доказаны следующие леммы и теорема

Лемма 1. Пусть выполняются условия а), б) и функция $X(t,s,\varepsilon)$ матричная функция Коши т.е.

$$\frac{dX(t,s,\varepsilon)}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon}K(t,t)X(t,s,\varepsilon),$$
$$X(s,s,\varepsilon) = I_2$$

где I_2 – единичная матрица второго порядка.

Тогда справедлива оценка

$$\|X(t,s,\varepsilon)\| \leq exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda(\tau)d\tau\right), (t,s)\in G\ .$$

Лемма 2. Пусть выполняются условия а), b) и $u(t)\in C^1_{\varphi,2}(R)$

$$F(t,\varepsilon) = X(t,-\infty,\varepsilon)\left[u(-\infty)-u(t)\right] + \int_{-\infty}^{t} R(t,\tau,\varepsilon)\left[u(t)-u(\tau)\right]d\tau, \varepsilon>0,$$

где

$$R(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)K(s,s), (t,s)\in G,$$

является резольвентой матричного ядра $\left[-\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)\right]$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t}\lambda(s)ds, t\in R, \lambda(t)>0$$

при почти всех $t\in R$ и $\|K(t,t)\|\leq N_0\lambda(t)$ при всех $t\in R, N_0>0.$ Тогда справедлива оценка

$$\|F(t,\varepsilon)\|_C \leq c_1\varepsilon^{\gamma},$$

где

$$c_1 = M\sup_{\nu\geq 0}(e^{-\nu}\nu^{\gamma}) + MN_0\int_0^{\infty}e^{-\nu}\nu^{\gamma}d\nu, M = \sup_{t,s\in R, t\neq s}\frac{\|u(t)-u(s)\|}{|\varphi(t)-\varphi(s)|^{\gamma}}.$$

Лемма 3. Пусть выполняются условия a), b), c), $\|K(t,t)\|\leq N_0\lambda(t)$, $\forall t\in R$ и

$$H(t,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)\left[K(t,s)-K(s,s)\right]+\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t R(t,\tau,\varepsilon)\left[K(t,s)-K(\tau,s)\right]ds,\ (t,s)\in G$$

Тогда справедлива оценка

$$\|H(t,s,\varepsilon)\|\leq\left(e^{-1}+N_0\right)l(s),(t,s)\in G,\varepsilon>0.$$

Теорема 7. Пусть выполняются условия a), b), c), $\|K(t,t)\leq N_0\lambda(t)\|$ при всех $t\in R,$ система (8) имеет решение $u(t)\in C^1_{\varphi,2}(R)$.Тогда решение $v(t,\varepsilon)$ системы (9) при $\varepsilon\to 0$ сходится по норме $C_{2,0}(R)$ к $u(t)$. и при этом справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|_C\leq c_2\varepsilon$$

где

$$c_2=c_1\exp\left\{\left(e^{-1}+N_0\right)\int_{-\infty}^{\infty}l(s)ds\right\},$$

Число c_1 определена в лемме 2.

Следствие 4. Если выполняются условия a), b) c), $\|K(t,t)\|\leq N_0\lambda(t),t\in R$ и существует $T\in R$ такое, что $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in(-\infty;T)$, то решение системы (1) в пространстве $C^1_{\varphi,2}(R)$ единственно.

В §3.2. разработан алгоритм выбора параметра регуляризации для решений систем двух линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси.

Одновременно рассмотрим систему двух линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода (8) и (9).

Предположим что в (9) вместо $f(t)$ задано её приближенное значение $f_\delta(t)$

$$\varepsilon v_\delta(t,\varepsilon)+\int_{-\infty}^t K(t,s)v_\delta(s,\varepsilon)ds=f_\delta(t)+\varepsilon u_{0\delta},\ t\in R \tag{10}$$

где $v_\delta(t,\varepsilon)$ – искомая вектор-функция.

Доказана следующая теорема:

Теорема 8. Пусть выполняются условия a), b), c), $\|K(t,t)\|\leq N_0\lambda(t)$.Тогда решение $v_\delta(t,\varepsilon)$ системы (10) при $\varepsilon=\sqrt{\delta}\to 0$ сходится по норме $C_T(R)$ к решению $u(t)$ системы (8) и при этом справедлива оценка

$$\left\|u(t)-v_\delta(t,\sqrt{\delta})\right\|_C\leq C_4\sqrt{\delta}$$

где $C_4=C_2+C_0C_3+C_3$.

В §3.3 рассмотрена регуляризация и единственность решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси в пространстве $C^{\gamma}_{\phi,n}(R)$, $0\prec\gamma\leq 1$.

Предположим выполнения следующих условий:

a) $K(t,s)=(K_{ij}(t,s)), i,j=1,2,...,n; K_{ij}(t,s)\in C(G),$ для фиксированного $t\in R, \|K(t,s)\|, \|K(s,s)\|\in L_1(-\infty,t)$ и $K_{ij}(t,t)\in C(R),$ где $C(G)-$пространство всех непрерывных функций на G;

b) $\lambda(t)\geq 0$ при $t\in R$ и $\lambda(t)\in C(R), \forall T\in R, \lambda(t)\in L_1(-\infty,T),$ где $\lambda(t)=\min_i \lambda_i(t), t\in R$;

c) при $t>\tau$ для любых $(t,s),(\tau,s)\in G$ справедливо оценка

$$\|K(t,s)-K(\tau,s)\|\leq l(s)\left[\int_\tau^t \lambda(s)ds\right],$$

где $l(t)\in C(R)\cap L_1(R).$

Лемма 4. Пусть выполняются условия a), b) и $X(t,s,\varepsilon)$ - матричная функция Коши,

то есть

$$\frac{\mathrm{dX(t,s,}\varepsilon)}{\mathrm{dt}}=-\frac{1}{\varepsilon}K(t,t)X(t,s,\varepsilon), X(t,t,\varepsilon)=I_n$$

где $I_n - n\times n-$мерная единичная матрица. Тогда справедлива оценка

$$\|X(t,s,\varepsilon)\|\leq \exp\left[-\int_s^t \frac{1}{\varepsilon}\lambda(\tau)d\tau\right], (t,s)\in G$$

Лемма 5. Пусть выполняются условия a), b) и $u(t)\in C^\gamma_{\varphi,n}(R), 0<\gamma<1,$

$$F(t,\varepsilon)=X(t,-\infty,\varepsilon)\left[u(-\infty)-u(t)\right]+\int_{-\infty}^t R(t,\tau,\varepsilon)\left[u(-\infty)-u(\tau)\right]d\tau, \varepsilon>0,$$

где

$$R(t,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)K(s,s), (t,s)\in G,$$

является резольвентой матричного ядра $[-\frac{1}{\varepsilon}K(t,t)],$

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^t \lambda(s)ds, t\in R, \lambda(t)>0$$

при почти всех $t\in R$ и $\|K(t,t)\|\leq N_0\lambda(t)$ при всех $t\in R, N_0>0.$ Тогда праведлива оценка

$$\|F(t,\varepsilon)\|_C\leq c_1\varepsilon^\gamma,$$

где

$$c_1 = M\sup_{\nu\ge 0}(e^{-\nu}\nu^{\gamma}) + MN_0\int_0^{\infty} e^{-\nu}\nu^{\gamma}d\nu, M = \sup_{t,s\in R, t\ne s}\frac{\|u(t)-u(s)\|}{|\varphi(t)-\varphi(s)|^{\gamma}}.$$

Лемма 6. Пусть выполняются условия a), b), c) и

$$H(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}X(t,s,\varepsilon)\big[K(t,s)-K(s,s)\big] + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t R(t,\tau,\varepsilon)\big[K(t,s)-K(\tau,s)\big]ds,$$

где $(t,s)\in G$. Тогда справедлива оценка

$$\|H(t,s,\varepsilon)\| \le \left(e^{-1}+N_0\right)l(s), (t,s)\in G, \varepsilon>0.$$

Теорема 9. Пусть выполняются условия a), b), c) и $\|K(t,t)\|\le N_0\lambda(t)$ при всех $t\in R$ и система (8) имеет решение $u(t)\in C^{\gamma}_{\varphi,n}(R), 0<\gamma\le 1.$ Тогда решение $v(t,\varepsilon)$ системы (9) при $\varepsilon\to 0$ сходится по норме $C_{n,0}(R)$ к $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|_C \le c_2\varepsilon^{\gamma}, 0<\gamma\le 1,$$

где

$$c_2 = c_1\exp\left\{\left(e^{-1}+N_0\right)\int_{-\infty}^{\infty} l(s)ds\right\},$$

$$c_1 = M\sup_{\nu\ge 0}(e^{-\nu}\nu^{\gamma}) + MN_0\int_0^{\infty} e^{-\nu}\nu^{\gamma}d\nu, M = \sup_{t,s\in R, t\ne s}\frac{\|u(t)-u(s)\|}{|\varphi(t)-\varphi(s)|^{\gamma}}.$$

Следствие 5. Если выполняются условия a), b) c) и $\|\mathrm{K(t,t)}\|\le \mathrm{N}_0\lambda(t), t\in \mathrm{R}$ и существует $T\in R$ такое, что $\lambda(t)>0$ при почти всех $t\in(-\infty;T)$ то решение системы (8) в пространстве $C^{\gamma}_{\phi,n}(R)$ единственно.

Пример. Рассмотрим системы (8) и (9) при

$$K(t,s)=\begin{pmatrix} k_{11}(t,s)k_{12}(t,s) \\ k_{13}(t,s)k_{14}(t,s) \end{pmatrix},$$

$$k_{11}(t,s)=a_1(s)+l_1(s)\left[\int_s^t \beta_1(\tau)d\tau\right],$$

$$k_{12}(t,s)=a_2(s)+l_2(s)\left[\int_s^t \beta_2(\tau)d\tau\right],$$

$$k_{21}(t,s)=a_3(s)+l_3(s)\left[\int_s^t \beta_3(\tau)d\tau\right],$$

$$k_{22}(t,s)=a_4(s)+l_4(s)\left[\int_s^t \beta_4(\tau)d\tau\right],(t,s)\in G,$$

где для фиксированного $t\in R,\ a_1(s),a_2(s),a_3(s),\ \ \lambda(s)=\min_{i=1,3} a_1(s)$

$$\beta_1(s),\beta_2(s),\beta_3(s)\in L_1(-\infty,t),l_1,(t)l_2(t),l_3(t),l_4(t)\in L_1(R),$$

$a_1(t)\geq 0$ и $a_2(t)\geq 0$ при всех $t\in R,|a_i(t)|\leq M_1\lambda(t)$ при всех $t\in R,$

$i=1,2,3,|\beta_j(t)|\leq M_2\lambda(t)$ и $|l_j(t)|\leq M_3 l_5(t)$ при всех $t\in R,$

$j=1,2,3,4,l_5(t)\in L_1(R),M_{1,},M_2,M_3-$положительные известные постоянные числа.

В этом случае, условия теоремы выполняются при

$$\lambda(t)=\min_{i=1,3} a_i(t),l(t)=2M_2M_3l_5(t),t\in R,N_0=2M_1.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования в данной диссертационной работе получены следующие выводы:

Для интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси:

– построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и доказаны теоремы единственности решений для линейных интегральных уравнений;

– построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и доказаны теоремы единственности решений для нелинейных интегральных уравнений;

– разработан алгоритм выбора параметра регуляризации;

– построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву и доказаны теоремы единственности решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси;

– разработан алгоритм выбора параметра регуляризации для систем двух линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси;

В диссертационной работе исследованы вопросы регуляризации и единственности решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси. Используя методы функционального анализа и неравенств доказаны теоремы единственности решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси и построены регуляризирующие операторы.

Полученные результаты диссертационного исследования выводы по вопросы единственности и регуляризации решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси могут быть использованы в различных областях науки и техники.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Камбарова, А.Д**. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси [Текст] / А. Асанов, А.Д. Камбарова // Известия кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. – 2015. – № 1(34). – С. 184-187.
2. **Камбарова, А.Д**. Класс линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси [Текст] / А.Д. Камбарова // Альманах современной науки и образования. – 2016. – № 2(104). – С. 59-62.
3. **Камбарова, А.Д**. Выбор параметра регуляризации линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода [Текст] / А.Д.Камбарова // Приволжский научный вестник. – 2016. – № 5(57). – С. 27-31.
4. **Камбарова, А.Д**. Регуляризация и единственность решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси [Текст] / А.Д. Камбарова // Проблемы современной науки и образования. – 2016. – № 2(44). – С. 29-35.
5. **Камбарова, А.Д**. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси [Текст] / А.К. Тойгонбаева, А.Д. Камбарова, Г.С. Ободоева, А.О. Оморов // Вестник филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования “Российский государственный социальный университет”. [Текст] / Ош, 2021. – №1(23). – С. 114-122.
6. **Камбарова, А.Д.** Сан огунда Вольтерранын биринчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемелерин чыгаруудагы регуляризациялоо параметрин тандоо [Текст] / А. Асанов, А.Д. Камбарова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – № 6. – Бишкек, 2019. – С.33-41.
7. **Камбарова, А.Д**. Сан огунда Вольтерранын биринчи түрдөгү эки сызыктуу интегралдык теңдемелеринин системасынын чыгарылышын регуляризациялоо параметрин тандоо [Текст] / А. Асанов, А.Д. Камбарова // наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – № 7. – Бишкек, 2020. – С. 3-8.
8. **Камбарова, А.Д.** Регуляризация решений одного класса систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси [Текст] / А.Д. Камбарова, А.К. Тойгонбаева, Н.С. Беделова, А.Б. Мурзабаева // Евразийское Научное Объединение. – Москва, 2021. – №6-1(76). – С. 34-37.

Камбарова Айсалкын Даминовнанын «Сан огунда Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелерин регуляризациялоо жана чыгарылыштарынын жалгыздыгы» деген темада 01.01.02 – дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: биринчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемеси, регуляризация, чыгарылышынын жалгыздыгы, туруктуулугун баалоо

Изилдөөнүн объектиси катары сан огунда Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелери каралды.

Изилдөөнүн максаты: Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелерин сан огунда чыгаруу үчүн регуляризациялоо операторун тургузуу жана чечимдеринин жалгыздыгын далилдөө, жана аларды чыгаруунун натыйжалуу ыкмаларын теориялык жактан негиздөө менен иштеп чыгуу.

Изилдөөнүн методдору. Изилдөөнүн жүрүшүндө функционалдык анализ, М.М. Лаврентьевдин регуляризациялоо ыкмасы, интегралдык өзгөртүүлөр ыкмалары ж.б. колдонулду.

Изилдөөнүн илимий жаңылыктары. Сан огунда Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык тендемелери үчүн сызыктуу интегралдык теңдемелери үчүн чечимдерин М.М.Лаврентьев боюнча регуляризациялоочу оператору тургузулду жана чечимдеринин жалгыздыгы далилденди. Сызыктуу эмес интегралдык теңдемелери үчүн чечимдерин М.М. Лаврентьев боюнча регуляризациялоочу оператору тургузулду жана чечимдеринин жалгыздыгы далилденди. Регуляризациялоо параметринин алгоритми иштелип чыгарылды. Сан огунда Вольтерранын биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин системасы үчүн чечимдерин М.М. Лаврентьев боюнча регуляризациялоочу оператору тургузулду жана чечимдеринин жалгыздыгы далилденди. Сан огунда Вольтерранын биринчи түрдөгү эки сызыктуу интегралдык теңдемелеринин системасы үчүн регуляризациялоо параметринин алгоритми иштелип чыгарылды.

Изилдөөнүн практикалык маанилүүлүгү. Иш теориялык мүнөзгө ээ. Изилдөөнүн натыйжасында алынган теориялык жыйынтыктар илимдин жана техниканын ар кандай аймактарында колдонулушу мүмкүн.

Колдонуу жааты. Интегралдык теңдемелер физикалык эксперименттерде, экономикалык системаларды моделдештирүүдө колдонулушу мүмкүн. Изилдөөнүн натыйжаларын жогорку окуу жайларында дифференциалдык теңдемелер курсун окутууда кошумча материал катары пайдаланууга болот.

РЕЗЮМЕ

диссертации Камбаровой Айсалкын Даминовны на тему «Регуляризация и единственность решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 -дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра первого рода, единственность решения, регуляризация, параметр регуляризации.

Объектом исследования являются интегральные уравнения Вольтерра первого рода на оси.

Цель исследования заключается в построении регуляризации и доказательстве единственности решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси и разработке эффективных методов их решения с теоретическим обоснованием.

Методы исследования. В ходе проведенного исследования использованы функциональный анализ, метод регуляризации М.М. Лаврентьева, методы интегральных преобразований.

Научная новизна:

Для интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси:

– Установлены достаточные условия единственности решения и построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву для линейных интегральных уравнений;

– Установлены достаточные условия единственности решения и построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву для нелинейных интегральных уравнений;

– Выбран параметр регуляризации для решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси;

– Установлены достаточные условия единственности решения и построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву для линейных систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси;

– Разработан алгоритм выбора параметра регуляризации для решений систем двух линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси.

Практическая значимость полученных результатов. Работа носит теоретический характер. Полученные по результатам исследования теоретические результаты могут быть применены в различных областях науки и техники.

Область применения. Интегральные уравнения могут быть применены в физических экспериментах, моделировании экономических систем. Результаты исследования могут быть использованы в качестве дополнительного материала при прочтении курса дифференциальных уравнений в высших учебных заведениях.

SUMMARY

dissertation "Regularization and uniqueness of solutions of Volterra integral equations of the first kind on the axis"of Kambarova Aisalkyn Daminovna is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences by the specialty 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: Volterra integral equation of the first kind, uniqueness of a solution, regularization, stability estimate.

The object of research is the Volterra integral equations of the first kind on the axis.

The aim of the work is to construct a regularization and prove the uniqueness of solutions of Volterra integral equations of the first kind on the axis and to develop effective methods for their solution with theoretical justification.

Research methodology. In the course of the study, we used functional analysis, the method of nonnegative quadratic forms, the method of regularization by M.M. Lavrent'ev, methods of integral transformations.

Scientific novelty:

For Volterra integral equations of the first kind on the axis:

- Sufficient conditions for the uniqueness of the solution were established and regularizing operators were constructed according to M.M. Lavrent'ev for linear integral Volterra equations of the first kind on the axis;
- Sufficient conditions for the uniqueness of the solution were established and regularizing operators were constructed according to M.M. Lavrent'ev for nonlinear Volterra integral equations of the first kind on the axis;
-Selected a regularization parameter for integral equations of Volterra of the first kind on the axis;
- Sufficient conditions for the uniqueness of the solution have been established and regularizing operators have been constructed according to M.M. Lavrent'ev for linear systems of Volterra integral equations of the first kind on the axis;
-Developed a regularization parameter for systems of two linear integral Volterra equations of the first kind on the axis.

Theoretical and practical significance. The work is theoretical. The theoretical results obtained from the research can be applied in various fields of science and technology.

Application area. The solution of integral equations is of great applied importance, in particular, it can be applied in mathematical processing (interpretation) of measurement results in physical experiments, modeling of economic systems, geophysics, astrophysics, image processing.

Басмага берилди:
Көлөмү : 1,5 б.т. Буйрутма № ____
Форматы 60х90 1/16. Нускасы 120 даана.
ОшМУ нун “Билим” редакциялык-басма бөлүмү
Ош ш., Ленина к., 331