ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ
ЮЖНОГО ОТДЕЛЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ К 01.19.599

На правах рукописи
УДК: 517.956.6

Бекмаматов Замирбек Молдошович

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош – 2021

Диссертационная работа выполнена на кафедре естественных наук и математики Баткенского государственного университета

Научный руководитель: **Сопуев Адахимжан,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и программирования Ошского государственного университета (Кыргызстан, г. Ош)

Официальные оппоненты: **Апаков Юсупжон Пулатович,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Наманганского инженерно-строительного института (Узбекистан, г. Наманган)

Тампагаров Куштарбек Бекмуратович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры естественно-гуманитарных дисциплин Научно-исследовательского медико-социального института (Кыргызстан, г. Жалал-Абад)

Ведущая организация: Кыргызско-Турецкий университет Манас, отделение Математики, 720044, Кыргызстан, г. Бишкек, проспект Чынгыза Айтматова 56

Защита диссертации состоится «12» января 2022 г. в 10^{00} часов на заседании диссертационного совета К 01.19.599 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университете, Институте природных ресурсов Южного отделения НАН Кыргызской Республики и Жалал-Абадском государственном университете по адресу: 723500, г. Ош, ул. Ленина, 331, 203 каб.

Идентификационный код онлайн трансляции защиты диссертации: http://vc.vak/b/k01-wvo-bll-2lm

Ознакомиться с диссертацией можно в центральной библиотеке Ошского государственного университета и на сайте oshsu.kg диссертационного совета.

Автореферат разослан « 6 » декабря 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Важнейшим разделом теории неклассических уравнений математической физики является теория уравнений смешанного (эллиптико-гиперболического, параболо-гиперболического, эллиптико-параболического) типов. Разрешимость краевых задач для таких уравнений изучены в работах Ф. Трикоми, А.В. Бицадзе, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, М.М. Смирнова, Т.Ш. Кальменова, А.М. Нахушева, В.И. Жегалова, Е.И. Моисеева, К.Б. Сабитова, А.К. Уринова и других авторов.

Дальнейшее развитие теории уравнений смешанного типа реализованы при решении краевых задач для уравнений смешанно-составного типов. Доказано, что, если порядок уравнения увеличивается до третьего или четвертого порядков, тогда на линии изменения типа требуются условия сопряжений самой функции, и её производных до второго или третьего порядков. Постановка и исследования краевых задач для таких уравнений потребовало новых подходов и методов исследования.

Особый интерес привлекал исследователей, случай, когда в одной из части смешанной области рассматривается уравнение составного типа, характеристическое уравнение которого имеет как действительные, так и комплекснозначные характеристики. Наряду с такими уравнениями, представляет научный интерес уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка и связанные с ними краевые задачи.

Краевые задачи для уравнений смешанно-составного типа третьего порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y u_{xx}+u_{yy}\right)=0,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}+\operatorname{sgn} y\, u_{yy}\right)=0$$

рассмотрены в работах А.В. Бицадзе, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева и их учениками.

В работах М.М. Смирнова и Л.А. Бобылёва изучены краевые задачи для уравнения смешанно-составного типа четвертого порядка вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+sgny\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0$$

Краевые задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа четвертого порядка исследованы в работах Т.Д. Джураева и его учениками.

Прикладная важность исследования краевых задач для уравнений смешанного и смешанно-составного типов, а также многочисленные их применения указаны в работах М.А. Абдрахманова, Ж.А. Акилова, Г.М. Стручиной, Дж.Уизема, Я.С. Уфлянда.

Диссертационная работа посвящена формулировки и исследовании корректных краевых задач и задачи сопряжений для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка в различных областях плоскости.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами. Работа выполнено в соответствии с Государственной и целевой программы НТР «Межгосударственная целевая программа и НТР с участием Кыргызской Республики» на тему: «Краевые задачи для уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков» (гос. регистр. №0007110, 05.02.2014 г.), «Локальные и нелокальные задачи для уравнений в частных производных четвертого порядка» (гос. регистр. №0007520, 01.01.2018 г.).

Цель и задачи исследования.

1. Доказательство существования и единственности решения задачи сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка;

2. Определения классов функций, обеспечивающих гладкость решения, а также выявления зависимости количество условий сопряжения от порядка уравнения;

3. Нахождения достаточных условий для однозначной разрешимости задачи сопряжений;

4. Определения конфигурации области для корректной постановки краевых задач для уравнений в частных производных четвертого порядка.

Научная новизна работы.

1. Найдены постановки корректных задач сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка;

2. Получены формулы представления решений задачи сопряжения в явном виде для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка;

3. Доказаны теоремы существования и единственности решений задачи сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка с линией склеивания $x=0$ и $y=0$;

4. Разработан алгоритм решения задачи сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка;

Практическая значимость полученных результатов. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании явлений и процессов, протекающих в неоднородных, кусочно-однородных средах и при сосредоточенных факторах, а также вносит определённый вклад для развития теории краевых задач для уравнений смешанного типа и задачи

сопряжений для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка.

Экономическая значимость полученных результатов. Разработанные математические методы решения краевых задач дают возможность аналитически решит задачи сопряжений для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка и реализуемы для получения численных расчётов, и тем самым снижаются расходы на исследования данной проблемы.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Формулировка правильно поставленных задач сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка;
2. Исследование однозначной разрешимости задачи сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка;
3. Влияния конфигурации области на постановки задачи сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка;
4. Получение представления решений задачи сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка.

Апробация результатов исследований. Итоги работы и полученные результаты регулярно обсуждались: на семинаре «Уравнения в частных производных» (г. Ош, ОшГУ, 2012-2021 гг.), руководитель – д.ф.-м.н., профессор А. Сопуев; на региональном научном семинаре «Актуальные проблемы математики и их применения», руководитель – член-кореспондент НАН КР, д.ф.-м.н., профессор К. Алымкулов (г. Ош, 2012-2021 гг.); на семинаре по дифференциальным уравнениям, руководитель – д.ф.-м.н., профессор К.С. Алыбаев (г. Жалал-Абад, ЖАГУ. 2018-2021 гг.); на второй международной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений» (Ыссык-Куль, Булан-Соготту, 2013); на V международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (Бишкек, 2016); на третьей международной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений» (Бишкек,2017).

Личный вклад соискателя. В совместных работах [5, 8] постановка задачи принадлежит А. Сопуеву, в работах [1, 2, 5] доказательство теорем существования и единственности решений, приведенные примеры и полученные результаты принадлежит автору работы.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основное содержание настоящей работы полностью опубликовано в 10 статьях и 3 тезисах международных конференциях, приведенных в автореферата. Общее количество накопленных баллов – 243.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, состоящих из 11 разделов, списка использованных источников из 49 наменований и заключения. Нумерация разделов – двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела. Нумерация теорем, формул, примеров – тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер раздела, третья на порядковый номер в разделе. Объем текста 105 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе “Обзор литературы и результатов” приводятся обзор работ по теме диссертационной работы и формулируются основные результаты, полученные в данном исследовании.

Во второй главе “Задачи сопряжения в прямоугольных областях с линией сопряжения $y=0$**”** сформулированы достаточные условия однозначной разрешимости задачи сопряжений для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка в прямоугольных областях, когда условия склеивания задаются на линиях $y=0$ и $x=0$.

В разделе 2.1 в прямоугольнике $\bar{D}=\bar{D}_1\cup\bar{D}_2$, где $D_1=D\cap(y>0)$, $D_2=D\cap(y<0)$, ограниченный линиями $A_0A_1: x=0,\ \ A_1B_1: y=-h_1,\ B_1B_0: x=\ell,$ $A_0B_0: y=h,\ \ (h,h_1,\ell>0)$, рассматривается задача сопряжения для уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{xx}+u_{yy})=0,\ (x,y)\in D_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}+cu=0,\ (x,y)\in D_2. \tag{2}$$

Задача 2.1.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^3(D)\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{4+0}(D_1)\cup$ $\cup C^{1+3}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению (1) и граничным условиям:

$$\begin{aligned}&u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,\\&u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\ u_{xx}(\ell,y)=\varphi_4(y),\ 0\le y\le h,\\&u(x,h)=\psi(x),\ 0\le x\le\ell,\end{aligned} \tag{3}$$

а также удовлетворяющую в области D_2 уравнению (2) и граничным условиям:

$$\begin{aligned}&u(0,y)=\varphi(y),\ -h_1\le y\le 0,\\&u(x,-h_1)=\psi_1(x),\ u_y(x,-h_1)=\psi_2(x),\ 0\le x\le\ell,\end{aligned} \tag{4}$$

где $\varphi(y),\psi(x),\ \varphi_i(y),\psi_j(x),\ (i=\overline{1,4},\ j=1,2)$ – заданные функции,

удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования

$$\varphi(y)\in C^3[-h_1,0],\ \varphi_i(y)\in C^3[0,h]\ (i=1,2),$$
$$\varphi_j(y)\in C^2[0,h]\ (j=3,4) \qquad (5)$$

$$\psi(x),\ \ \psi_1(x)\in C^3[0,\ell],\ \psi_2(x)\in C^2[0,\ell],$$
$$\varphi(0)=\varphi_1(0),\ \varphi'(0)=\varphi_1'(0),\ \psi(0)=\varphi_1(h),$$
$$\psi'(0)=\varphi_2(h),\ \varphi(-h_1)=\psi_1(0), \qquad (6)$$
$$\varphi'(-h_1)=\psi_2(0).$$

Из постановки задачи 2.1.1, как следствие, вытекают следующие условия сопряжения

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),$$
$$u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=\nu(x), \qquad (7)$$
$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=\mu(x),\ \ 0\le x\le \ell,$$

где $\tau(x),\ \nu(x),\ \mu(x)$ – пока неизвестные функции.

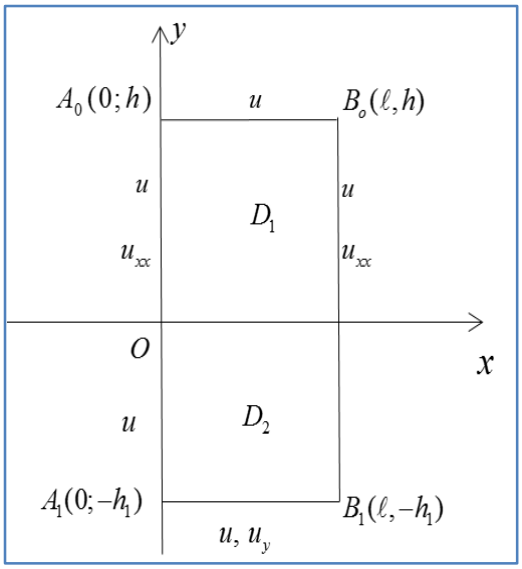

Рис. 1. К задаче 2.1.1

При решении задачи 2.1.1 используется методы теории уравнений смешанного и смешанно-составного типов.

После того, когда будут найдены функции $\tau(x),\ \nu(x),\ \mu(x)$, задача 2.1.1 расщепляется на две самостоятельные задачи в областях D_1 и D_2 соответственно.

В области D_1 методом понижения порядка уравнения (1) задача 2.1.1 сводится к задаче Дирихле для уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}=z_0(x,y),\ (x,y)\in D_1, \qquad (8)$$

где $z_0(x,y)$ – известная функция, которая выражается через данные задачи 2.1.1. С учетом постановки задачи и устремляя y к нулю из уравнения (8) получаем соотношение

$$\tau''(x)+\mu(x)=z_0(x,0), \qquad (9)$$

полученное из области D_1. Используя краевые условия $\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau(\ell)=\varphi_2(0)$ из (9) определяем $\tau(x)$ через $\mu(x)$ в виде

$$\tau(x)=\alpha(x)+\int_0^{\ell}G(x,t)\mu(t)dt \qquad (10)$$

где $\alpha(x)$ – известная функция, а $G(x,t)$ – функция Грина.

Методом интегрирования из уравнения (2) получаем второе соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\mu(x)$, принесённое из области D_2:

$$\mu(x)=\frac{2}{h_1^2}\tau(x)+\int_0^x[N_1(x,\xi)\tau(\xi)+N_2(x,\xi)\mu(\xi)]d\xi+\mu_0(x),\ 0\le x\le\ell, \qquad (11)$$

где $N_1(x,\xi),\ N_2(x,\xi),\mu_o(x)$ – заданные известные функции,

Затем исключая функцию $\tau(x)$ из (10) и (11), получим интегральное

уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu(x)=\mu_0(x)+\int_0^{\ell} N(x,\xi)\mu(\xi)d\xi, \tag{12}$$

где $N(x,\xi)$, $\mu_0(x)$ – известные функции.

Если выполняется условие

$$\ell\cdot\max_{0\le x,\xi\le\ell}|N(x,\xi)|<1, \tag{13}$$

тогда уравнение (12) имеет единственное решение. Определив $\mu(x)$ из (12), найдем $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Тогда решение задачи 2.1.1 в области D_1 определяется как решение задачи Дирихле для уравнения (8)

$$\begin{gathered}u(x,y)=\int_0^{\ell} G_\eta(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi-\int_0^{\ell} G_\eta(x,y;\xi,h)\psi(\xi)d\xi+\int_0^{h} G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-\\ -\int_0^{h} G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta-\int_0^{\ell} d\xi\int_0^{h} G(x,y;\xi,\eta)z_0(\xi,\eta)d\eta,\end{gathered} \tag{14}$$

где $G(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{4\ell h}{\pi_2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\dfrac{1}{h^2n^2+\ell^2m^2}\sin\left(\dfrac{\pi n}{\ell}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi m}{h}y\right)\sin\left(\dfrac{\pi n}{\ell}\xi\right)\sin\left(\dfrac{\pi m}{h}\eta\right)$ – функция Грина, а в области D_2 – как решение задачи Гурса для уравнения (2)

$$\begin{gathered}u(x,y)=\Phi(x,y)+\tau(x)+y\nu(x)+\frac{1}{2}y^2\mu(x)+\int_0^{x} H_1(x,y,\xi)\tau(\xi)d\xi+\\ +\int_0^{x} H_2(x,y,\xi)\nu(\xi)d\xi+\int_0^{x} H_3(x,y,\xi)\mu(\xi)d\xi,\end{gathered} \tag{15}$$

где $\Phi(x,y)=\varphi_0(y)-c\int\limits_0^{x} d\xi\int\limits_0^{y}\vartheta(x,y;\xi,\eta)\varphi_0(\eta)d\eta,\quad H_1(x,y,\xi)=-c\int\limits_0^{x}\vartheta(x,y;\xi,\eta)d\eta,$

$H_2(x,y,\xi)=-c\int\limits_0^{x}\vartheta(x,y;\xi,\eta)\eta\,d\eta,\quad H_3(x,y,\xi)=-\dfrac{c}{2}\int\limits_0^{x}\vartheta(x,y;\xi,\eta)\eta^2d\eta$;

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n c^n}{n!(3n+2)!}(x-\xi)^n(y-\eta)^{3n+2}.$$

Теорема 2.1.1. Если выполняются условия (5), (6) и (13), то решение задачи 2.1.1 существует, оно единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (14) и (15) соответственно.

В разделе 2.2 в области D, описанной в разделе 2.1, рассмотрены задачи сопряжения для уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+a_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+a_2(x,y)\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{16}$$

и (2) с линией склеивания $y=0$, где $a_1(x,y), a_2(x,y)$ – заданные непрерывные функции.

Задача 2.2.1. Найти функцию $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^3(D)\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{4+0}(D_1)\cup C^{1+3}(D_2)]$, удовлетворяющую в

области уравнению (16) и краевым условиям (3), а также удовлетворяющую в области D_2 уравнению (2) и краевым условиям (4), где $\varphi(y), \psi(x), \varphi_i(y), \psi_j(x), (i=1,4,\ j=1,2)$ – заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования

$$\begin{aligned}&\varphi(y)\in C^3[-h_1,0],\ \varphi_i(y)\in C^3[0,h]\ (i=1,2),\ \varphi_j(y)\in C^2[0,h]\ \ (j=3,4)\\&\psi(x),\ \ \psi_1(x)\in C^3[0,\ell],\ \psi_2(x)\in C^2[0,\ell],\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\varphi(0)=\varphi_1(0),\ \varphi'(0)=\varphi_1'(0),\ \psi(0)=\varphi_1(h),\ \ \psi(l)=\varphi_2(h),\\&\psi_1(0)=\varphi(-h_1),\ \varphi'(-h_1)=\psi_2(0).\end{aligned} \tag{18}$$

При решении задачи 2.2.1 с помощью функции Грина из области D_1 получим соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\mu(x)$ в виде

$$\tau(x)=\alpha(x)+\int_0^\ell G(x,t)\mu(t)dt, \tag{19}$$

где $\alpha(x)=\varphi_1(0)+\frac{x}{\ell}\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\right]$, $G(x,t)$ – функция Грина.

Методом интегрирования получаем второе соотношение, полученное из области D_2

$$\mu(x)=\frac{2}{h_1^2}\tau(x)+\int_0^x\left[N_1(x,\xi)\tau(\xi)+N_2(x,\xi)\mu(\xi)\right]d\xi+\mu_0(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{20}$$

где $N_1(x,\xi),\ N_2(x,\xi),\ \mu_0(x)$ – вполне определенные функции.

Исключив $\tau(x)$ из (19) и (20), будем иметь интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu(x)=\mu_0(x)+\int_0^\ell N(x,\xi)\mu(\xi)d\xi, \tag{21}$$

где $N(x,\xi)=N_3(x,\xi)+\int_0^x R_1(x,t)N_3(t,\xi)dt,\ \mu_0(x)=\alpha_1(x)+\int_0^x R_1(x,\xi)\alpha_1(\xi)d\xi,$

$R_1(x,t)$ – резольвента ядра $\mathrm{N}_2(x,\xi)$, $\alpha_1(x)$ – известная функция.

При выполнении условия

$$\ell\cdot\max_{0\le x\le\ell}\left|N(x,\xi)\right|<1 \tag{22}$$

уравнение (21) имеет единственное решение. Далее, определив $\mu(x)$ из (21), затем подставляя ее значение в (19) находим $\tau(x)$.

Теорема 2.2.1. Пусть выполнены условия (17), (18) и (22). Тогда решение задачи 2.2.1 существует и единственно.

В разделе 2.3 в прямоугольнике $D=\left\{0\le x\le\ell,\ -h_1\le y\le h\right\}=D_1\cup D_2$, $D_1=D\cap(y>0)$, $D_2=D\cap(y<0)$ рассмотрена задача сопряжения (Рис. 2).

Задача 2.3.1. Найти функцию $\vartheta(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^3(D)\cap\left[C^{3+1}(D_1)\cup C^{1+3}(D_1)\cup C^{1+3}(D_2)\right]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+A(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+C(x,y)\right)\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}+q(x,y)\vartheta\right)=0, \qquad (23)$$

и краевым условиям:

$$\vartheta(0,y)=\varphi_1(y),\ \vartheta(\ell,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,$$
$$\vartheta_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le h,\ \vartheta(x,h)=\varphi_4(x),\ \vartheta_{yy}(x,h)=\varphi_5(x),\ 0\le x\le \ell,$$

а также удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$\frac{\partial^4\vartheta}{\partial x\partial y^3}+d\vartheta=0, \qquad (24)$$

и краевым условиям:

$$\vartheta(0,y)=\varphi(y),\ -h_1\le y\le 0,\ \vartheta(x,-h_1)=\psi_1(x),\ \vartheta_y(x,-h_1)=\psi_2(x),\ 0\le x\le \ell,$$

где $A(x,y), B(x,y)$ и $C(x,y)$ – заданные вещественные функции класса $C^{1+1}(D_1)$ и $C(D_1)$ соответственно; $q(x,y)\in C^{1+1}(D_1)$; d – вещественное число, $\varphi(y)$, $\varphi_k(y)$, $\varphi_j(x)$ $(k=1,2,3;\ j=1,2)$, $\psi_i(x)$ $(i=1,2)$ – заданные вещественные функции, удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования

$$\varphi(y)\in C^3[-h_1,0],\ \varphi_k(y)\in C^3[0,h],\ \varphi_3(y)\in C^2[0,h],\quad (k=1,2);$$
$$\varphi_4(x)\in C^3[0,\ell],\ \varphi_5(x)\in C^2[0,\ell],\quad \psi_1(x)\in C^3[0,\ell],\quad \psi_2(x)\in C^2[0,\ell]; \qquad (25)$$

$$\varphi(0)=\varphi_1(0),\ \varphi_1(h)=\varphi_4(0),\ \varphi_3(h)=\varphi_5(0),$$
$$\varphi_2(h)=\varphi_4(l),\ \varphi(-h_1)=\psi_1(0),\ \varphi'(-h_1)=\psi_2(0),\ q(x,y)\in C(D_1),\quad q(x,y)\le 0. \qquad (26)$$

Уравнение (23) в отличие от уравнений рассмотренных в задачах 2.1.1 и 2.2.1 в области D_1 имеет однократные действительные характеристики $x=0$ и $y=0$, поэтому значения функции $\vartheta(x,y)$, $\vartheta_{yy}(x,y)$, задаются на верхней части прямоугольника D, здесь также выполняются следующие условия сопряжения

$$\vartheta(x,+0)=\vartheta(x,-0)=\tau(x),\ \vartheta_y(x,+0)=\vartheta_y(x,-0)=\nu(x),$$
$$\vartheta_{yy}(x,+0)=\vartheta_{yy}(x,-0)=\mu(x),\ 0\le x\le \ell,$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$, $\mu(x)$ – пока неизвестные функции.

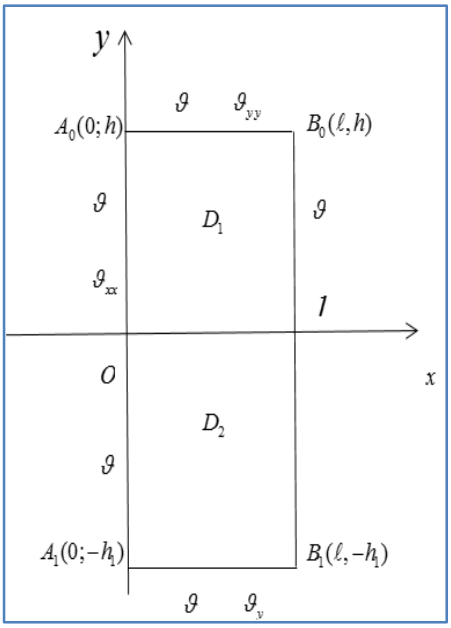

Рис. 2. К задаче 2.3.1

Аналогично, как в предыдущих задачах, задача 2.3.1 расщепляется на две самостоятельные задачи в областях D_1 и D_2. Исходя из этих задач, на линии склеивания $y=0$ будут получены соотношения между функциями $\tau(x)$, $\nu(x)$ и $\mu(x)$. Методом исключения, разрешимость задачи 2.3.1 эквивалентным образом сводится к разрешимости интегрального уравнение относительно функции $\mu(x)$ вида

$$\mu(x)=\int_0^x N_2(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+\int_0^\ell N_3(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+\alpha_1(x), \tag{27}$$

где $N_2(x,\xi)$, $N_3(x,\xi)$, $\alpha_1(x)$ – вполне определенные функции.

После обращения Волтерровскую часть уравнения (27) будем иметь интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu(x)=\mu_0(x)+\int_0^\ell N(x,\xi)\mu(\xi)d\xi, \tag{28}$$

где $N(x,\xi)=N_3(x,\xi)+\int_0^x Q_1(x,t)N_3(t,\xi)dt,\ \mu_0(x)=\alpha_1(x)+\int_0^x Q_1(x,t)\alpha_1(\xi)d(\xi),$

$Q_1(x,t)$ – резольвента ядра $N_2(x,\xi)$.

Если

$$\ell\cdot\max_{0\le x,\xi\le l}\left|N(x,\xi)\right|<1, \tag{29}$$

то уравнение (28) имеет единственное решение.

Таким образом, решение задачи 2.3.1 в области D_1 редуцируется к решению задачи Дирихле для уравнения

$$\vartheta_{xx}+\vartheta_{yy}+q(x,y)\vartheta=z_0(x,y),\quad (x,y)\in D_1,$$

где $z_0(x,y)$ – известная функция, а в области D_2 - к решение задачи Гурса для уравнения (24).

Теорема 2.3.1. Если выполняются условия (25), (26) и (29), то решение задачи 2.3.1 существует и единственно.

Третья глава “Задачи сопряжения в криволинейных областях” посвящена задачам сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка в криволинейных областях.

Обозначим через $A_0(-1,0)$, $B_0(1,0)$, $N(0,p)$, $A_1(-1,-h)$, $B_1(1,-h)$, $(h,p>0)$ – точки плоскости. Пусть $q(x):[-1,1]\to[0,p]$ – достаточно гладкая возрастающая функция на $[-1,0]$, причем $q(1)=0$, $q(0)=p$, определяем дуги A_0N, $NB_0:\{q(x),x:-1\le x\le 0,$ $0\le x\le 1\}$ D_1 – криволинейная треугольная область A_0B_0N. D_2 – прямоугольная область $A_0B_0B_1A_1: D=D_1\cup D_2$, $\Gamma=A_0N,NB_0$ (Рис. 3).

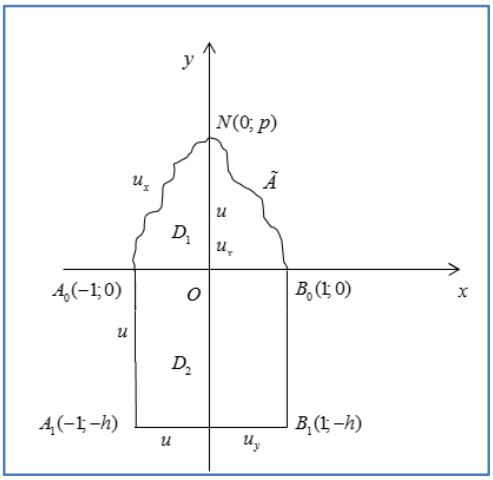

Рис. 3. К задаче 3.1.1

В разделе 3.1 рассмотрена

Задача 3.1.1. Найти функцию $u(x,y)\in C^1(\bar{D})\cap C^3(D)\cap[C^{4+0}(D_1)\cup C^{0+4}(D_1)\cup C^{1+3}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(u_{xx}+u_{yy}+cu\right)=0, \tag{30}$$

и краевым условиям

$$u(0,y)=f_1(y),\ u_x(0,y)=f_2(y),\ 0\le y\le p,\ \ u_x\big|_{\Gamma}=f_3(s),$$

а также удовлетворяющую в области D_2 уравнению (2) и краевым условиям:

$$u(-1,y)=\varphi(y),\ -h\le y\le 0\,,\ u(x,-h)=\psi_1(x),\ u_y(x,-h)=\psi_2(x),\ -1\le x\le 1,$$

где $f_1, f_2, f_3, \varphi, \psi_1, \psi_2$ – заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования:

$$\varphi(y)\in C^3[-h,0],\ \ f_1(y)\in C^2(ON),\ \ f_2(y)\in C^1(ON),\ f_3(s)\in C^2(\Gamma),\ \ \psi_1(x)\in C^3\left[-1,1\right]$$

$$\psi_2(x)\in C^2\left[-1,1\right],\ f_3(A)=\varphi(A),\ \ \varphi(-h)=\psi_1(-1),\ \ \varphi'(-h)=\psi_2(-1).$$

s – длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки A_0 (Рис. 3); c – вещественное число, причем $c\le 0$. Особенностью рассматриваемой задачи в данном разделе состоит в том, что условия задаются и внутри области D_1.

Задача 3.1.1 расщепляется на две самостоятельные вспомогательные задачи в областях D_1 и D_2 соответственно.

При исследовании задачи в области D_1 воспользуемся представлением любого регулярного решения уравнения (30) в виде

$$u(x,y)=u_0(x,y)+x\lambda(y)+\omega(y),$$

где $u_0(x,y)$ – регулярное решение уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\ (x,y)\in D_1,$$

а $\lambda(y)$ и $\omega(y)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции в области D_1, которые могут быть подчинены следующим условиям $\lambda(0)=\ \omega(0)=\lambda(N)=\omega(N)=0.$

Доказательство существование решение задачи 3.1.1 проводится в случае, когда Γ совпадает с полуокружностью $x^2+y^2=1,\ \ y\ge 0.$

Разрешимости задачи 3.1.1 эквивалентным образом редуцируется к решению интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода. Далее, методом функции Грина в области D_1 и функции Римана в области D_2 решены вспомогательные задачи и получены формулы представления решения в соответствующих областях. Установлена однозначной разрешимости задачи 3.1.1.

В разделе 3.2 рассмотрена задача 3.2.1 с линией сопряжения $x=0.$ Обозначим через $A(0,-1)$, $B(0,1)$, $N(h,0)$; $A_1(-h_1,-1)$; $B_1(-h_1,1)$, $(h,h_1=const>0)$ – точки плоскости (x,y). Пусть $q(y):\left[-1,1\right]\to\left[0,h\right]$ – достаточно гладкая возрастающая функция на $\left[-1,0\right]$, причем $q(-1)=0,\ \ q(0)=h,$ определяем дуги $AN:\ NB:\left\{(q(y),y):-1\le y\le 0;\ 0\le y\le 1\right\}$;

D_1 – криволинейная треугольная область ABN; D_2 – прямоугольная область A_1B_1BA: $D=D_1\cup D_2$, $\Gamma=\overline{BN}\cap\overline{NA}$ (Рис. 4).

Задача 3.2.1. Найти функцию $u(x,y)\in C^1(\bar{D})\cap C^3(D)\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{0+4}(D_1)\cup$

$\cup C^{3+1}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(u_{xx}+u_{yy}+cu\right)=0$$

и краевым условиям $u(x,0)=f_1(x),\ u_y(x,0)=f_2(x),\ 0<x<h,\ u_y\big|_{\Gamma}=f_3(s),$

а также удовлетворяющую в области D_2 уравнению

$$u_{xxxy}+a_1(x,y)u_{xxx}+a_2(x,y)u_{xxy}+b_1(x,y)u_{xx}+$$
$$+b_2(x,y)u_{xy}+c_1(x,y)u_x+c_2(x,y)u_y+d(x,y)u=0$$

и краевым условиям:

$$u(x,-1)=\psi(x),\ -h_1\le x\le 0,\ u(-h_1,y)=\psi_1(y),\ u_x(-h_1,y)=\psi_2(y),\ -1\le y\le 1,$$

где c – заданное вещественное число, причем $c\le 0$;

$a_k(x,y), b_k(x,y), c_k(x,y)\ (k=1,2),\ a_{1xxx},$

$a_{2xxy},\ b_{1xx},\ b_{2xy},\ c_{1xx},\ c_{2xy}\in C(\overline{D_2});$

$f_1, f_2, f_3,\ \psi,\ \psi_1,\ \psi_2$ – заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования

$f_1\in C^2(ON),\ f_2\in C^1(ON),\ f_3\in C^2(\Gamma),\ \psi\in C^3[-h_1,0],$

$\psi_1\in C^3[-1,1],\ \psi_2\in C^2[-1,1],\ f_3(A)=\psi(A),$

$\psi(-h_1)=\psi_1(-1),\ \psi'(-h_1)=\psi_2(-1);$ s – длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки A.

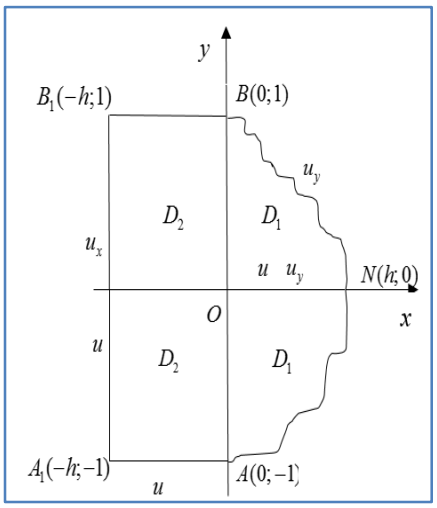

Рис. 4. К задаче 3.2.1

Схема исследования задачи 3.2.1, такой же, как и в задаче 3.1.1. Отметим, что разрешимость задачи 3.2.1 сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно функции $\nu(x)$, $\mu(x)$ и методом исключения найдено решения задачи 3.2.1. Представлены явные формулы решения.

В разделе 3.3 для уравнений вида

$$u_{xxxx}+u_{xxyy}=0,\ \ (x,y)\in D_1=\{(x,y): x^2+y^2=1,\ y>0\} \tag{31}$$

$$u_{xyyy}+au_{xyy}+bu_{xy}+cu_x=0,\ (x,y)\in D_2=\{(x,y): -1<x<1,\ -1<y<0\} \tag{32}$$

где a, b, c – заданные вещественные числа, $\gamma=\partial D_1\cap(y>0)$ – полуокружность, $AB=\{(x,y): -1<x<\ell,\ y=0\}$- отрезок оси абсцисс, $O(0,0)$ – начало координат, $M(0,1)$ – точка пересечения полуокружности с осью ординат, а $D=D_1\cup AB\cup D_2$ (Рис. 5), решена

Задача 3.3.1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^3(D)\cap C^3(\overline{D_1})\cap[C^{4+0}(D_1)\cup C^{2+2}(D_1)\cup C^{1+3}(D_2)]$;

2) удовлетворяет в области D_1 уравнению (31) и условиям:

$$u_{xx}\big|_{\gamma}=0,\ t\in\gamma,\ u\big|_{OM}=f_1(y),\ u_x\big|_{OM}=f_2(y),\ 0\le y\le 1,$$

3) удовлетворяет в области D_2 уравнению (32) и условиям:

$$u(-1,y)=\varphi(y),\ -1\le y\le 0,\ u(x,-1)=\psi_1(x),\ u_y(x,-1)=\psi_2(x),\ -1\le x\le 1,$$

где $f_1(y)$ и $f_2(y)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем $f_1(0)=f_2(0)=f_1(N)=f_2(N)=0;$ $\varphi(y),$ $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ – заданные вещественные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\varphi(y)\in C^3[-1,0],\ \psi_1(x)\in C^3[-1,1],\ \psi_2(x)\in C^2[-1,1],\ \varphi(-1)=\psi_1(-1),\ \varphi'(-1)=\psi_2(-1). \qquad (33)$$

Методом интегральных уравнений доказана однозначная разрешимость задачи 3.3.1. Для задачи 3.3.1 приведём следующий

Пример 1. Пусть $a=-3,\ b=3,\ c=-1$. Тогда уравнение (32) примет вид

$$u_{xyyy}-3u_{xyy}+3u_{xy}-u_x=0, \qquad (34)$$

Рассмотрим следующие краевые условия:

$$u_{xx}\big|_{\gamma}=0,\ (x,y)\in\gamma, \qquad (35)$$

$$u\big|_{OM}=f_1(y)=y^2(y-1),\ 0\le y\le 1,$$
$$u_x\big|_{OM}=f_2(y)=y^2(y^2-1) \qquad (36)$$

$$u(-1,y)=\varphi(y)=y^2,\ -1\le y\le 0, \qquad (37)$$

$$u(x,-1)=\psi_1(x)=x^2,$$
$$u_y(x,-1)=\psi_2(x)=2x,\ -1\le x\le 1, \qquad (38)$$

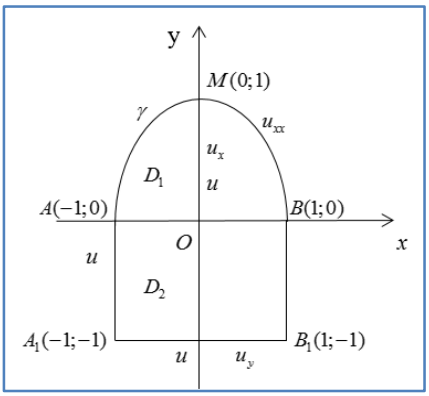

Рис. 5. К задаче 3.3.1

Введя обозначение $w(x,y)=u_{xx}$ при $y>0$ в уравнении (31) для $w(x,y)$ имеем уравнения Лапласа $w_{xx}+w_{yy}=0,$ решение которого удовлетворяющее краевым условиям (35) и $w(x,0)=\tau''(x),\ 0\le x\le \ell,$ имеет вид:

$$w(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{(t-x)^2+y^2}-\frac{1}{(1-tx)^2+t^2y^2}\right]\tau''(t)dt. \qquad (39)$$

Далее, дважды интегрируя соотношение (39) по x в пределах от 0 до x, и учитывая краевые условия (36), получаем

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_0^x\left\{\int_0^\sigma\left[\left[\int_{-1}^{1}\frac{1}{(t-\rho)^2+y^2}-\frac{1}{(1-\rho t)^2+t^2y^2}\right]\tau''(t)dt\right]d\rho\right\}d\sigma+ \qquad (40)$$
$$+xy^2(y^2-1)+y^2(y-1),\ (x,y)\in D_1.$$

Дифференцируя формулу (40) дважды по x и дважды по y, затем сложив их находим

$$u_{xx}+u_{yy}=2(6y^2-1)x+6y-2. \qquad (41)$$

Переходя в (41) к пределу при $y\to+0,$ будем иметь соотношение, полученное из области D_1

$$\tau''(x)+\mu(x)=-2(x+1). \qquad (42)$$

Решение уравнения (34), удовлетворяющее следующим условиям

$$u(x,0)=\tau(x),\ u_y(x,0)=\nu(x),\ u_{yy}(x,0)=\mu(x),\ 0\le x\le \ell,$$

где $\tau(x),\ \nu(x),\ \mu(x)$ – пока неизвестные функции, имеет вид

$$u(x,y)=\left(\tau(x)(1-y+\frac{1}{2}y^2)+\nu(x)(y-y^2)+(\frac{1}{2}\mu(x)-1)y^2\right)e^y+y^2. \qquad (43)$$

Подставляя значения $u(x,y)$ и $u_y(x,y)$ из (43) в краевые условия (38)

соответственно получаем следующие соотношения:

$$\frac{5}{2}\tau(x)-2\nu(x)+\frac{1}{2}\mu(x)-1=(x^2-1)e,\ \frac{1}{2}\tau(x)-\frac{1}{2}\nu(x)-\frac{1}{2}\mu(x)+1=2(xe+1). \qquad (44)$$

Отсюда, исключив $\nu(x)$, имеем

$$\tau(x)+5\mu(x)=2(x^2-8x-1)e. \qquad (45)$$

Исключив $\mu(x)$ из (42) и (45) будем иметь уравнение относительно $\tau(x)$

$$\tau''(x)-\frac{1}{5}\tau(x)=-\frac{2}{5}(x^2-8x-1)e-2(x+1). \qquad (46)$$

Решая уравнения (46) при краевых условиях $\tau(-1)=\tau(1)=0$ получим

$$\tau(x)=\int_{-1}^{1}G(x,t)\cdot F(t)dt, \qquad (47)$$

где $F(t)=-\frac{2}{5}(t^2-8t-1)e-2(t+1)$,

$$G_1(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{5}}{sh\dfrac{2}{\sqrt{5}}}\cdot sh\dfrac{x+1}{\sqrt{5}}\cdot sh\dfrac{t-1}{\sqrt{5}}, & -1\le x\le t,\\[2ex] \dfrac{\sqrt{5}}{sh\dfrac{2}{\sqrt{5}}}\cdot sh\dfrac{t+1}{\sqrt{5}}\cdot sh\dfrac{x-1}{\sqrt{5}}, & t\le x\le 1,\end{cases}$$ – функция Грина.

Далее, подставляя $\tau(x)$ из (47) в (45) будем определять $\mu(x)$, а затем из (44) находим $\nu(x)$, и тем самым решение задачи 3.3.1 в области D_2, представленное формулой (43).

Осуществляя интегрирование в (40), решение задачи 3.3.1 в области D_1 представим в виде

$$u(x,y)=-\frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1}\Bigg(\left(x-t\right)arctg\frac{t-x}{y}+\frac{y}{2}\ln\left(\frac{y^2+(t-x)^2}{t^2+y^2}\right)+\left(t-\frac{x}{y}\right)arctg\frac{t}{y}+\left(\frac{x}{t^2y}-\frac{1}{t}\right)\times$$
$$\times arctg\frac{1-tx}{ty}+\frac{1}{2t}\ln\left(\frac{(ty)^2+(1-tx)^2}{1+(ty)^2}\right)+\left(\frac{1}{t}-\frac{x}{t^2y}\right)arctg\frac{1}{ty}\Bigg)\tau''(t)dt+xy^2(y^2-1)+y^2(y-1). \qquad (48)$$

Следовательно, решение задачи 3.3.1 в области D_1 даётся формулой (48), а в области D_2 – формулой (43).

В четвертой главе “Локальные и нелокальные задачи сопряжения” рассмотрены краевая задачи для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядков с кратными характеристиками.

В разделе 4.1 в области D, ограниченной линиями $AA_1: x=0,\ A_1B_1: y=h,\ \ BB_1: x=\ell\ \ (\ell,h>0)$ и отрезками прямых $AC: y=-x,$ $BC: y=x-\ell,$ где $C\left(\ell/2;-\ell/2\right)$ – точка пересечения прямых, исследована задача сопряжения для уравнений

$$u_{xxxx}+u_{xxyy}=0, \qquad (49)$$

$$u_{xxxx}-u_{xxyy}=0, \qquad (50)$$

где $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$.

Задача 4.1.1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^3(D) \cap [C^{4+0}(D_1) \cup C^{2+2}(D_1) \cup$ $\cup C^{4+0}(D_2) \cup C^{2+2}(D_2)]$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению (49) и краевым условиям:

$$\begin{aligned} &u(0,y) = \varphi_1(y),\ u(\ell,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \\ &u_{xx}(0,y) = \varphi_3(y),\ u_{xx}(\ell,y) = \varphi_4(y),\ 0 \le y \le h, \\ &u(x,h) = \varphi(x),\ 0 \le x \le \ell, \end{aligned} \tag{51}$$

а также удовлетворяющую в области D_2 уравнению (50) и краевым условиям:

$$u\big|_{AC} = \psi_1(y),\ u_x\big|_{AC} = \psi_2(y),\ u_{xx}\big|_{AC} = \psi_3(y),\ -\frac{\ell}{2} \le y \le 0, \tag{52}$$

где $\varphi(x)$, $\varphi_i(y)$, $\psi_j(x)$, $(i = \overline{1,4};\ j = \overline{1,3})$ – заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования:

$$\begin{aligned} &\varphi_i(y) \in C^3[0,h],\ (i = 1,2),\ \varphi_k(y) \in C^2[0,h],\ (k = 3,4), \\ &\varphi(x) \in C^3[0,\ell],\ \psi_1(y) \in C^3[-\frac{\ell}{2},0],\ \psi_2(y) \in C^2[-\frac{\ell}{2},0],\ \psi_3(y) \in C^1[-\frac{\ell}{2},0], \\ &\varphi_1(0) = \psi_1(0),\ \varphi_1'(0) = \psi_2(0),\ \varphi_3(0) = \psi_3(0),\ \varphi(0) = \varphi_1(h),\ \varphi_2(h) = \varphi(\ell). \end{aligned} \tag{53}$$

Из постановки задачи 4.1.1, как следствие, вытекают следующие условия сопряжения:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x),\ u_{yy}(x,+0) = u_{yy}(x,-0) = \mu(x),\ 0 \le x \le \ell,$$

где $\tau(x)$ и $\mu(x)$ – пока неизвестные функции.

Задача 4.1.1 расщепляется на следующие вспомогательные задачи:

Задача 4.1.2. Найти функцию $u(x,y) \in C^2(\bar{D}_1) \cap \left[C^{4+0}(D_1) \cup C^{2+2}(D_1)\right]$ удовлетворяющую в области D_1 уравнению (49), краевым условиям (51) и условию $u(x,+0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell$.

Задача 4.1.3. Найти функцию $u(x,y) \in C^3(\bar{D}_2) \cap \left[C^{4+0}(D_2) \cup C^{2+2}(D_2)\right]$, удовлетворяющую в области D_2 уравнению (50), краевым условиям (52) и условию $u(x,-0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell$.

Решение задачи 4.1.2 эквивалентным образом сводится к решению задачи Дирихле для уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} = z_0(x,y)$$

в области D_1 с краевыми условиями

$$\begin{aligned} &u(0,y) = \varphi_1(y),\ u(\ell,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \\ &u(x,h) = \varphi(x),\ 0 \le x \le \ell,\ u(x,+0) = \tau(x),\ 0 \le x \le \ell, \end{aligned}$$

где $z_0(x,y)$ – вполне определенная функция.

Представление решение задачи 4.1.3 в области D_2 даётся формулой

$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & \Psi_1(y) + (x+y)\left(\psi_2(y) - \psi_2(0)\right) - 2\int_y^0 \left(x + y + 2\left(y-t\right)^2\right)\psi_3(t)dt + \\ & + \tau(x+y) + F_2(x+y) + F_2(x-y) + 2y\Psi'(0) - 2xy\Phi''(0), \end{aligned}$$

где $\Psi_1(y)=\psi_1(y)-\psi_1(0),\ \Psi_2(y)=\psi_2(y)-\psi_2(0),$
$\tau(0)=\psi_1(0),\ \ \tau'(0)=\psi_2(0),\ \ \tau''(0)=\psi_3(0).$

Для определения $\tau(x)$ и $\mu(x)$ на линии склеивания $y=0$ будем иметь следующие соотношения:

1) из области D_1: $\tau''(x)+\mu(x)=z_0(x,0),$ с краевыми условиями $\tau(0)=\varphi_1(0),$ $\tau(\ell)=\varphi_2(0),$
2) из области D_2: $\tau''(x)-\mu(x)=\vartheta_0(x,0),\ 0\le x\le \ell,$ где $\vartheta_0(x,y)$ – известная функция.

Отсюда исключив $\tau''(x),$ будем иметь

$$\mu(x)=\frac{1}{2}(z_0(x,0)-\vartheta_0(x,0)),\ \ 0\le x\le \ell.$$

Далее, подставляя $\mu(x)$ в уравнение пункта 1), находим функцию $\tau(x)$ и тем самым решение задачи 4.1.1 в области D_1. Следовательно, при выполнении условия (53) задача 4.1.1 однозначна разрешима.

В разделе 4.2 в прямоугольнике $D=\{0\le x\le \ell,\ -h_1\le y\le h\}$ рассматривается задача сопряжения для уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+A(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+C(x,y)\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0,\ \ (x,y)\in D_1, \tag{54}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}+d\,u=0,\ \ (x,y)\in D_2, \tag{55}$$

где $D_1=D\cap(y>0),\ \ D_2=D\cap(y<0),\ \ d$ – вещественное число; $A,\ B,\ C$ – заданные функции.

Задача 4.2.1. Найти функцию
$u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^3(D)\cap[C^{3+1}(D_1)\cup C^{1+3}(D_1)\cup\ \cup C^{3+1}(D_2)],$ удовлетворяющую в области D_1 уравнению (54) и краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(\ell,y)=\varphi_2(y),\ u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le h,$$
$$u_{yy}(x,h)=f_2(x),\ u(x,h)=f_1(x),\ 0\le x\le \ell,$$

а также удовлетворяющую в области D_2, уравнению (55) и краевым условиям

$$u(0,y)=\psi_1(y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\psi_2(y),\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0}=\psi_3(y),\ -h_1\le y\le 0,$$

где $\varphi_i(y),\ f_k(x),\ \psi_i(y)\ (i=\overline{1,3};\ k=1,2)$ – заданные функции удовлетворяющие следующим условиям гладкости и условиям согласования:

$$\begin{gathered}A(x,y),\ B(x,y)\in C^{1+1}(D_1),\ C(x,y)\in C(D_1),\ \varphi_i(y)\in C^3[0,h],\ (i=1,2),\\ f_1(x)\in C^3[0,\ell],\varphi_3(y)\in C^1[0,h],\ f_2(x)\in C^1[0,\ell],\ \psi_1(y)\in C^3[-h_1,0],\\ \psi_2(y)\in C^2[-h_1,0],\ \psi_3(y)\in C^1[-h_1,0];\end{gathered} \tag{56}$$

$$\begin{gathered}\varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \varphi_1(h)=f_2(0),\ \varphi_3''(h)=f_2''(\ell),\ f_1(\ell)=\varphi_2(h),\ f_1''(\ell)=\varphi_3(h),\\ f_2(\ell)=\varphi_2''(h),\ \varphi_1''(h)=f_2(0),\ \psi_2(0)=\varphi_1'(0),\ \psi_3(0)=\varphi_1''(0).\end{gathered} \tag{57}$$

Согласно постановке задачи 4.2.1, введём следующие обозначения

$$u(x,+0)=u(x,-0)=\tau(x),\quad u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=\mu(x),\ \ 0\le x\le \ell,$$

где $\tau(x)$ и $\mu(x)$ – пока неизвестные функции.

Исследование задачи 4.2.1 проводится по выше изложенной схеме, т.е. будем получать соотношения между функциями $\tau(x)$ и $\mu(x)$. На основе этих соотношений будем определять решение задачи в соответствующих областях. В данном случае имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\tau(x)+\int\limits_0^x H_0(x,-h_1;\xi)\tau(\xi)d\xi+\lambda\mu(x)=\psi(x)-\Phi(x,-h_1),\\ \tau(x)=\alpha(x)+\int\limits_0^\ell G(x,t)\mu(t)dt,\end{cases}\tag{58}$$

где $G(x,t)$ – функция Грина, λ $(\lambda\ne 0)$ – заданное число; $H_0(x,-h_1;\xi)$, $\alpha(x)$ – вполне определенные функции, которые выражаются через данные рассматриваемой задачи.

Исключив $\tau(x)$ из (58) относительно $\mu(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu(x)=\int\limits_0^\ell N(x,\xi)\mu(\xi)d\xi+F(x),\tag{59}$$

где $N(x,\xi)$, $F(x)$ – известные функции, выражающиеся данными задачи 4.2.1.

Если выполняется условие

$$\ell\cdot\max_{0\le x,\xi\le\ell}|N(x,\xi)|<1,\tag{60}$$

тогда уравнение (59) имеет единственное решение.

Определив функцию $\mu(x)$ как решение уравнения (59) и подставляя её значение во второе уравнение (60), определяем $\tau(x)$.

Теорема 4.2.1. Пусть выполнены условия (56), (57) и (60). Тогда решение задачи 4.2.1. существует и единственно.

В разделе 4.3 в прямоугольнике $D=\{0\le x\le\ell,-h_2\le y\le h_1\}$ $(h_1,h_2,\ell>0)$ рассматривается задача 4.3.1, заключающееся в определении функции $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^3(D)\cap[C^{2+2}(D_1)\cup C^{4+0}(D_1)\cup C^{2+2}(D_2)]$, удовлетворяющее уравнений

$$u_{xxxy}+u_{xyyy}=0,\ (x,y)\in D_1=D\cap(y>0),$$
$$u_{xxyy}+a_1(x,y)u_{xxy}+a_2(x,y)u_{xyy}+b_1(x,y)u_{xx}+b_2(x,y)u_{xy}+$$
$$+b_3(x,y)u_{yy}+c_1(x,y)u_x+c_2(x,y)u_y+\mathrm{d}(x,y)u=0,\ (x,y)\in D_2=D\cap(y<0),$$

краевых условий: $u(0,y)=\varphi_1(y)$, $u(\ell,y)=\varphi_2(y)$, $0\le y\le h_1$; $u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y)$, $u_{xx}(\ell,y)=\varphi_4(y)$, $0\le y\le h_1$; $u(x,h_1)=\varphi_5(x)$, $0\le x\le\ell$,

$u(0,y)=\psi_1(y)$, $u_x(0,y)=\psi_2(y)$, $-h_2\le y\le 0$, $u(x,-h_2)=\varphi(x)$, $0\le x\le\ell$,

и следующих условий:

$a_i,b_j,c_i,\mathrm{d}\in C(\overline{D_2})$; $a_{1xxy},a_{2xyy},b_{1xx},b_{2xy},b_{3yy},c_{1x},c_{2y}\in C(\overline{D_2})$, $\psi_1(y)\in C^2[-h_2,0]$,

$\varphi_i(y)\in C^3[0,h_1]$, $(i=1,2)$, $\varphi_j(y)\in C^2[0,h_1]$ $(j=3,4)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi(x)\in C^3[0,\ell]$,

$$\psi_2(y)\in C^2\left[-h_2,0\right],\ \varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \psi_1(-h_2)=\varphi(0),\ \varphi'(0)=\psi_2(-h_2),$$
$$\varphi_1(h_1)=\varphi_5(0),\ \varphi_5(\ell)=\varphi_2(h_2),\ \varphi_1'(0)=\psi_1'(0),\ \tau(0)=\psi_1(0),\ \tau'(0)=\psi_2(0), \quad (61)$$
$$\nu(0)=\varphi_1'(0)=\psi_1'(0),\ \nu'(0)=\psi_2'(0),\ \tau''(0)=\varphi_3(0),\ \nu''(0)=\varphi_3'(0).$$

Методом интегральных уравнений разрешимость задачи 4.3.1 сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\mu(\xi)+\int_0^{\ell}K(x,\xi)\mu(\xi)d\xi=\Phi_2(x),$$

где ядро $K(x,\xi)$ и $\Phi_2(x)$ известные функции, которая при выполнении условия

$$\ell\cdot\max_{0\le x,\xi\le\ell}\left|K(x,\xi)\right|<1, \quad (62)$$

допускает единственное решение.

Теорема 4.3.1. Если выполняются условия (61) и (62), тогда решение задачи 4.3.1 существует и единственно.

Доказательство теоремы 4.3.1 устанавливается методом, изложенным в разделах 4.1.1 и 4.2.1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе сформулированы и доказаны однозначная разрешимость задач сопряжений для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядков как с постоянными, так и с переменными младшими коэффициентами.

В ходе исследования установлено, что для корректности изучаемых задач, вместо обычных двух условий склеивания, потребуется задание трех условий склеивания, когда порядок уравнения равен четырем и условия сопряжения задаются не на характеристической линии. Рассмотрены также случаи, когда на линии сопряжения задаются нелокальные интегральные условия, а также разрывные условия склеивания.

В работе исследованы задачи сопряжения, когда граничные условия задаются на криволинейных участках рассматриваемой области, или краевые условия задаются на всех границах области. При решении задач использованы метод функции Грина, Римана, метод редукции к интегральным уравнениям и их системам, принцип сжимающих отображений и метод последовательных приближений.

Полученные результаты, связанные с исследованием задачи сопряжений для составного и гиперболического уравнений четвертого порядка, могут быть использованы для развития теории краевых задач для уравнений в частных производных высокого порядка, а также при моделировании явлений и процессов, протекающих в неоднородных, кусочно-однородных средах и при сосредоточенных факторах.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. **Бекмаматов, З.М.** Задача сопряжения для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка [Текст] / С. Бабаев, З.М. Бекмаматов // Вестник ОшГУ. – III выпуск. – Ош, 2012 г. – С. 61-66.
2. **Бекмаматов, З.М**. Об одной нелокальной задаче для уравнения составного и гиперболического типов четвёртого порядка [Текст] / С. Бабаев, З.М. Бекмаматов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2017. – № 5. – С.105-109.
3. **Бекмаматов, З.М.** Задача сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка с младшими членами [Текст] / З.М. Бекмаматов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2019. – № 12. – С. 27-34.
4. **Бекмаматов, З.М.** Задача сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка с линией изменения типа $x = 0$ [Текст] / З.М. Бекмаматов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2019. – № 12. – С. 40-48.
5. **Bekmamatov, Z.M.** Revisiting the Mixed Problem for Equations of Compound and Hyperbolic Types of Order Four [Text] / A. Sopuev, S. Babaev, Z.M. Bekmamatov // Revisiting the mixed problem for equations of compound end hyperbolic types of order four // Growth poles of the global economy: emergence, changes and future perspectives. Lecture notes in networks and system. – 2020. – 73, V.1. – P. 725-736.
6. **Бекмаматов, З.М.** Краевая задача для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка с кратными характеристиками [Текст] / З.М. Бекмаматов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – Бишкек, 2020. –№ 1. – С. 17-21.
7. **Бекмаматов, З.М.** О задаче сопряжения для уравнений смешанно-составного типа четвертого порядка на плоскости [Текст] / З.М. Бекмаматов // Вестник ОшГУ: Математика, физика, техника. – Ош, 2021. – № 1. – С. 39-47.
8. **Бекмаматов, З.М.** Краевые задачи для уравнения смешанно-составного типа четвертого порядка, содержащий эллиптико-гиперболический оператор [Текст] / А. Сопуев, З.М. Бекмаматов // Вестник ОшГУ: Математика, физика, техника. – Ош, 2021. – № 1. – С. 106-113.
9. **Бекмаматов, З.М.** О задаче сопряжения для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка с двумя независимыми переменными [Текст]/ З.М. Бекмаматов // Евразийское научное объединение. – Москва, 2021. – №4 (74). – С. 9-13.
10. **Бекмаматов, З.М.** Краевые задачи для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка на плоскости [Текст]/ З.М. Бекмаматов // Евразийское научное объединение. – М., 2021. №5 (75). – С. 4-8.

Бекмаматов Замирбек Молдошовичтин “Төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболалык теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселелери” деген темада 01.01.02 – дифференциялык тендемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: чек аралык маселе, чек аралык шарттар, жалгаштыруу маселелери, курама жана гиперболалык теңдемелер, Гриндин жана Римандын функциялары, интегралдык теңдеме, чечимдин жалгыздыгы, чечимдин жашашы.

Изилдөөнүн объектиси: төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболалык теңдемелер үчүн чек аралык жана жалгаштыруу маселелери.

Изилдөөнүн предмети: төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболалык теңдемелер үчүн чек аралык жана жалгаштыруу маселелеринин корректтүүлүгү.

Изилдөөнүн максаты: курама жана гиперболалык теңдемелер үчүн чек аралык жана жалгаштыруу маселелеринин бир маанилүү чечимге ээ болушунун жеткиликтүү шарттарын аныктоо.

Изилдөө методдору: математикалык физиканын теңдемелери, аралаш типтеги теңдемелер, функционалдык анализ жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер теорияларынын методдору, Гриндин жана Римандын функциялары колдонулат.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы жана теориялык маанилүүлүгү:

- төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболалык типтеги теңдемелер үчүн корректтүү коюлган чек аралык жана жалгаштыруу маселелери баяндалган;
- төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболалык типтеги теңдемелер үчүн чек аралык маселелердин чечимдеринин жашашынын жана жалгыздыгынын жеткиликтүү шарттары табылган;
- төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболалык типтеги теңдемелер үчүн чек аралык маселелердин бир маанилүү чечилиши далилденген;
- төртүнчү тартиптеги гиперболалык теңдемелер үчүн Риман функциясы тургузулган жана анын касиеттери изилденген.

Алынган теориялык жыйынтыктар аралаш типтеги теңдемелер жана төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселелер теориясындагы жаңы жыйынтыктар болуп эсептелет.

Изилдөөнүн практикалык маанилүүлүгү. Маселерди чечүүнүн иштеп чыгылган алгоритми жалгаштыруу маселелери менен байланышкан практикалык маселелерди чечүүдө колдонсо болот.

РЕЗЮМЕ

диссертации Бекмаматова Замирбека Молдошовича на тему: “Задачи сопряжения для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка” на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: краевые задачи, граничные условия, задачи сопряжения, составные и гиперболические уравнения, функции Грина и Римана, интегральное уравнение, единственность решения, существование решения.

Объект исследования: краевые задачи и задачи сопряжения для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка.

Предмет исследования: корректность задачи сопряжений для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка.

Цель исследования: установление достаточных условий однозначной разрешимости задачи сопряжений для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка.

Методы исследования: используются методы теории уравнений математической физики, уравнений смешанного типа, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений, функции Грина и Римана.

Научная новизна и теоретическая значимость исследования:

- сформулированы корректные постановки краевых задач и задачи сопряжений для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка;
- найдены достаточные условия существования и единственности решений краевых задач для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка;
- доказаны однозначной разрешимости краевых задач для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка;
- построены функции Римана для уравнений гиперболического типа четвертого порядка и изучены его свойства.

Полученные теоретические результаты являются новыми в теории уравнений смешанного типа и задачи сопряжений для уравнений в частных производных четвертого порядка.

Практическая значимость полученных результатов. Разработанный алгоритм построения решения могут быть использованы в приложениях при решении практических задач, связанных с задачами сопряжения.

SUMMARY

dissertation "Conjugation problems for equations of composite and hyperbolic types of the fourth order" of Bekmamatov Zamirbek Moldoshovich is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences by the specialty 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: boundary value problems, boundary conditions, conjugation problems, composite and hyperbolic equations, Green and Riemann functions, integral equation, uniqueness of a solution, existence of a solution.

Object of research: boundary value problems and conjugation problems for equations of composite and hyperbolic types of the fourth order.

Subject of research: correctness of the conjugation problem for fourth-order equations of composite and hyperbolic types.

Purpose of the study: to establish sufficient conditions for the unique solvability of the conjugation problem for equations of composite and hyperbolic types of the fourth order.

Research methods: the research used the methods of the theory of equations of mathematical physics, equations of mixed type, functional analysis and the theory of nonlinear integral equations, Green's and Riemann's functions.

Scientific novelty and theoretical significance of the research:

• formulated correct statements of boundary value problems and conjugation problems for equations of composite and hyperbolic types of the fourth order;

• sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems for equations of composite and hyperbolic types of the fourth order are found;

• unique solvability of boundary value problems for equations of composite and hyperbolic types of the fourth order was established;

• the Riemann functions are constructed for the fourth order hyperbolic equation.

The obtained theoretical results are new in the theory of mixed-type equations and the conjugation problem for fourth-order partial differential equations.

The practical significance of the study. The developed algorithm for constructing a solution can be used in applications for solving practical problems related to conjugation problems.